UNIVERSITA' DEGLI STUDI
DI MODENA E REGGIO EMILIA

Scuola di Dottorato in Scienze umane
Indirizzo: Scienze didattiche, narratologiche e della formazione

Ciclo XXIII

IL LABORATORIO DI MATEMATICA: ASPETTI STORICI, EPISTEMOLOGICI, DIDATTICI E COGNITIVI.
IL PROGETTO REGIONALE MMLAB-ER

Candidato: Rossella Garuti

Relatore (Tutor): Prof.ssa Maria Giuseppina Bartolini

Coordinatore dell'indirizzo: Prof. Giorgio Zanetti

Direttore della Scuola di dottorato: Prof. Stefano Calabrese

Composizione grafica a cura dell'Autore

Indice

Parte seconda
Il progetto regionale Scienze e Tecnologie - Azione 1 – Laboratori delle Macchine Matematiche in Emilia-Romagna -MMLab-ER

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare va a Mariolina Bartolini a cui mi lega un rapporto di amicizia e di collaborazione scientifica che dura da molti anni. Da lei ho imparato, in questi anni, il rigore e la passione per la ricerca scientifica. Ho vissuto questi tre anni di dottorato come un 'regalo': poter studiare, fare ricerca, leggere, pensare, discutere senza l'affanno del lavoro in classe o nella scuola (da quattro anni sono Dirigente scolastico) è un sogno per molti. Il dottorato mi ha consentito di realizzarlo.

L'avventura umana nella realizzazione di questo progetto regionale è andata di pari passo con l'avventura scientifica.

Grazie a Francesca Martignone, mia compagna in questa avventura, per aver condiviso i momenti di soddisfazione come quelli di difficoltà.

A lei, giovane ricercatrice in didattica della matematica, auguro di realizzare i suoi sogni, in un paese che sappia rispettare e valorizzare le competenze scientifiche. È stato un piacere vedere come, di fronte a docenti con tanta esperienza di classe, Francesca acquistasse sempre più autorevolezza in virtù delle competenze scientifiche e della sensibilità didattica che sa trasmettere.

Grazie a Carla Zanoli, dell'Associazione Macchine Matematiche, che mi ha introdotto nel mondo delle macchine con competenza e passione: alla sua abilità devo la versione al computer del quesito simil-PISA sul pantografo di Scheiner.

Grazie alla Scuola di Dottorato in Scienze Umanistiche e al coordinatore dell'indirizzo in Scienze didattiche, narratologiche e della formazione prof. Giorgio Zanetti per le tante occasioni di riflessione e stimolo offerte.

Infine grazie a tutti i docenti, studenti, responsabili dei centri territoriali, tutor e formatori che hanno partecipato con tanta passione a questo progetto.

Introduzione

Lo scopo della presente ricerca è quello di analizzare gli aspetti principali dell'idea di *laboratorio di matematica* così come si configura all'interno della Ricerca in Didattica della Matematica, secondo le linee di tendenza della Ricerca per l'Innovazione. Il caso che viene analizzato riguarda il *Progetto regionale Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna - Azione 1 - Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia-Romagna* (MMLab-ER). Il progetto biennale 2008-2010, coordinato da Maria Giuseppina Bartolini e Michela Maschietto (Università di Modena e Reggio Emilia), è stato finanziato dalla Regione Emilia-Romagna.

La ricerca si divide in due parti: la prima, costituita dai tre capitoli iniziali, descrive la parte teorica della ricerca, mentre la seconda entra nel merito del progetto, scelto come caso paradigmatico.

Il primo capitolo illustra le tendenze della Ricerca italiana in Didattica della matematica e riporta le componenti caratteristiche della Ricerca per l'Innovazione: cognitiva, didattica ed epistemologica. Inoltre vengono riportati gli elementi più significativi della Ricerca basata su Progetti (Design-based Research) in quanto il progetto MMLab-ER si colloca all'interno di questo tipo di ricerca generale.

Il secondo capitolo illustra l'idea di laboratorio di matematica così come si è venuta formando dagli inizi del '900 a oggi, con un accento particolare sul Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena.

Il terzo capitolo descrive il quadro di riferimento teorico sotteso al progetto MMLab-ER come caso particolare di Ricerca per l'Innovazione, prendendo in esame le componenti didattiche, cognitive ed epistemologiche specifiche del progetto.

La seconda parte, per così dire sperimentale, descrive le caratteristiche, la realizzazione e i risultati del progetto MMLab-ER.

Il quarto, quinto e sesto capitolo presentano la descrizione del progetto relativamente al rapporto fra le istituzioni coinvolte - RER (Regione Emilia-Romagna), USR-ER (Ufficio Scolastico Regionale), ANSAS (ex-IRRE Emilia-Romagna) e Università di Modena e Reggio Emilia - all'articolazione territoriale del progetto (cinque province della regione e i relativi Centri territoriali per gli insegnanti), al coinvolgimento degli insegnanti e degli studenti afferenti il progetto e alla struttura organizzativa del progetto.

Il settimo, ottavo, nono e decimo capitolo focalizzano l'attenzione sulla formazione degli insegnanti del progetto mettendo in luce le scelte operate dal team di ricerca (Bartolini Bussi, Garuti, Martignone e Maschietto) e la relazione di queste con i risultati della ricerca nazionale e internazionale sulla formazione degli insegnanti di matematica.

I capitoli undicesimo, dodicesimo e tredicesimo si occupano delle sperimentazioni in classe nell'ambito del progetto MMLab-ER. In particolare il capitolo dodicesimo descrive una sperimentazione pilota sulle macchine aritmetiche e geometriche condotta in prima persona in una classe di un'altra regione; il capitolo undicesimo analizza alcune delle sperimentazioni in classe effettuate dagli insegnanti del progetto, scelte sulla base dei diversi ordini e indirizzi scolastici coinvolti e sulla tipologia di macchine matematiche studiate; il capitolo tredicesimo riguarda la possibilità di 'tradurre' le idee del laboratorio di matematica in un quesito simile a quelli del progetto OCSE-PISA e i risultati di un'indagine tra gli studenti del progetto su un quesito simil-PISA, dove il contesto è rappresentato da una macchina matematica particolare: il pantografo di Scheiner.

Nell'ultimo capitolo sono riportate alcune considerazioni finali emerse da questo lavoro. In particolare il progetto viene analizzato attraverso due lenti diverse: la prima, più strettamente di ricerca, riguarda le componenti epistemologiche, cognitive e didattiche del progetto. In altre parole, il progetto MMLab-ER viene analizzato come prodotto della Ricerca per l'Innovazione, quindi come oggetto di ricerca. La seconda lo analizza come progetto calato sul territorio che coinvolge insegnanti, studenti e istituzioni nell'ottica del "*Fare sistema in Emilia-Romagna*", parola d'ordine lanciata dall'Assessorato alla scuola, formazione professionale, università, lavoro e pari opportunità della regione Emilia-Romagna.

Parte Prima

LE RADICI DEL PROGETTO MMLAB-ER

Capitolo primo
La ricerca italiana in didattica della matematica

1.1. La Ricerca in Didattica della Matematica fino agli anni '80

Nel novembre del 1991 i Nuclei di Ricerca Didattica tennero a Pisa il loro VIII Seminario di Ricerca Didattica con l'intento di cominciare a delineare, per l'Italia, le caratteristiche specifiche della Ricerca in Didattica della Matematica (RDM) (Arzarello, 1992; Boero, 1992; Malara, 1992; Prodi, 1992). I principali elementi emersi in quello 'storico' seminario furono raccolti in più articoli nella rivista "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate", del Centro "Morin" e delinearono le principali linee di tendenza della Ricerca Didattica per l'Innovazione (Bartolini Bussi & Arzarello, 1998). Si trattò anche di una riflessione sulle diverse componenti della Ricerca in Didattica della Matematica così come si era venuta delineando dagli anni '60.

Nei primi anni '60 la RDM era basata sull'organizzazione concettuale della disciplina (*Componente A*). L'obiettivo di queste ricerche è di migliorare l'insegnamento della matematica in situazioni 'generiche', concentrando gli sforzi sull'organizzazione logica dei concetti, visti sopratutto all'interno della disciplina. Per l'enfasi data ai contenuti disciplinari non si affrontano le relazioni tra la conoscenza da insegnare e la conoscenza scientifica che legittima la prima. L'attività didattica è progettata tenendo conto delle difficoltà concettuali di tipo matematico, cui vengono ricondotte generalmente anche quelle di tipo psicologico: l'attenzione è rivolta ai prodotti da insegnare più che ai processi di apprendimento-insegnamento. Questo tipo di ricerca si poneva problemi del tipo: *Cosa è veramente importante nel concetto di limite?* Un esempio importante è rappresentato dal Syllabus prodotto alla fine degli anni Settanta dall'Unione Matematica Italiana (UMI, 1980) dove si descrivevano in una gerarchia concettuale le principali conoscenze e abilità richieste agli studenti che alla fine delle scuole superiori intendessero frequentare una facoltà scientifica.

In quegli stessi anni iniziarono nelle scuole notevoli movimenti per il rinnovamento dell'insegnamento della matematica, e non solo, che coinvolgevano molti insegnanti e le loro associazioni. Si richiedeva di produrre esempi paradigmatici per il miglioramento della matematica in situazioni specifiche. Le questioni di didattica della matematica venivano a trovarsi immerse in un ambiente più ampio dove anche le variabili sociali e pedagogiche dovevano essere prese in considerazione. Emerse così una seconda componente (Componente B) definita come RDM per l'innovazione concreta nella classe. L'intervento nella classe è organizzato su basi pragmatiche e grande attenzione è dedicata ai processi di insegnamento-apprendimento, oltre che ai loro prodotti. Questa componente è illustrata dai lavori di Emma Castelnuovo e dalle sue parole:

> È necessario ricorrere all'oggetto e all'azione se si vuole che l'insegnamento della geometria intuitiva abbia un carattere costruttivo e che sia quindi formativo: ecco la conclusione a cui avremmo condotto il lettore. Oggetto e azione non devono seguire uno schema prestabilito, ma lasciarsi ispirare ogni volta dalle esigenze della classe che l'insegnante avrà la sensibilità di saper cogliere. È proprio da queste esigenze che sono sorti gli esempi che abbiamo dato. I mezzi pratici per la realizzazione delle esperienze non hanno nessuna importanza: si tratterà di un modello, di un dispositivo, di un'esperienza realizzata con l'aiuto di un materiale o solamente immaginata, delle variazioni di luce o del mutarsi di un'ombra. Ed è proprio forse questa libertà di ideare e di interpretare, ugualmente alla portata del maestro e dell'allievo, che costituisce una delle caratteristiche del metodo costruttivo. (Castelnuovo, 1965, p. 65).

Per fare un confronto fra le due componenti, molto schematicamente si può dire che nella componente A si assume un modello top-down: il punto di partenza è l'analisi concettuale che determina la pratica; invece nella componente B si parte dallo specifico problema di insegnamento quale è percepito dall'insegnante e la pratica è determinata dalle concrete condizioni di azione nella classe. Nel primo caso l'influenza sul sistema educativo è giocata a livello di curricolo inteso (programmi e libri di testo), nel secondo caso sul curricolo effettivo.

Un altro aspetto importante, caratteristico della RDM italiana, è stata l'esistenza di gruppi misti Università-Scuola, che ha permesso un'integrazione fra ricerca teorica e ricerca-azione. Questo è avvenuto in un clima di grande rinnovamento dei programmi fra gli anni '70 e gli anni '80 (programmi della scuola media 1979 e della scuola elementare 1984) che ha coinvolto direttamente molti fra i matematici dell'Università e numerosi insegnanti. La collaborazione tra matematici professionisti e insegnanti è essenziale per capire gli sviluppi successivi ed è peculiare della realtà italiana.

Negli anni dell'innovazione (anni '80) tra i vari Nuclei di RDM emerge la necessità di indagare meglio circa le dimensioni più propriamente didattiche dei vari progetti che vengono via via sperimentate (a Genova, Modena e Torino, per fare alcuni esempi). Emerge, dal confronto con le ricerche internazionali una terza componente (componente C) che può essere definita come RDM come osservazione e modellizzazione dei processi. Il suo obiettivo è quello di migliorare la conoscenza sui processi che avvengono in classe. Si ricercano strumenti e metodologie presi dalla psicologia, dalla pedagogia e dalla sociologia. In queste ricerche si presentano esperimenti didattici (*teaching experiments*) per verificare le ipotesi scientifiche che vengono formulate. In questo tipo di ricerche l'attenzione è sull'osservazione dei processi che avvengono in classe. Quest'ultima componente è stata molto importante per la RDM italiana e l'integrazione con le altre due componenti, più specificatamente autoctone, ha prodotto uno sviluppo specifico della RDM italiana.

Emerge così un nuovo orientamento che come tale costituisce il nucleo della ricerca italiana in didattica della matematica: Ricerca per l'Innovazione. Il progetto MMLab-ER ha le sue radici in questo tipo di ricerca.

1.2. Il nuovo paradigma: la Ricerca per l'Innovazione

Questa tendenza, che si è delineata dalle riflessioni dell'VIII Seminario dei Nuclei di Ricerca in Didattica della Matematica, ha come oggetto di studio l'insegnamento-apprendimento della matematica sia nel contesto di specifiche situazioni di classe sia nella problematica di una loro espansione al sistema educativo più ampio. Gli scopi possono essere schematizzati in questo modo:

- produrre esempi paradigmatici di miglioramento dell'insegnamento matematico;
- studiare le condizioni per una loro concreta realizzazione;
- produrre costrutti teorici innovativi che siano utili per guidare l'azione degli insegnanti in classe;
- produrre metodologie didattiche innovative.

In sintesi la ricerca per l'innovazione che si è venuta delineando in Italia è quindi costituita da un intreccio delle seguenti componenti:

a. <u>Componente epistemologica</u> dei concetti matematici coinvolti, mentre si utilizzano quelle tecniche, mutuate dalle scienze cognitive, che via via appaiono più opportune per affrontare il concreto problema didattico in esame;

b. <u>Componente didattica</u> in quanto fornisce risposte sul piano dell'ingegneria didattica; produce quindi progetti per l'educazione matematica, basati su teorizzazioni didattiche che tengono conto sia dell'analisi dei processi concreti di apprendimento che avvengono in classe, sia dell'analisi epistemologica dei contenuti matematici coinvolti;
c. <u>Componente cognitiva</u> in quanto pone problemi concreti di educazione matematica (come le ricerche sul campo) e li affronta in un quadro di riferimento ampio, che tiene conto sia delle difficoltà di ordine concettuale e cognitivo sia dell'analisi epistemologica dei concetti coinvolti.

I prodotti di tale ricerca sono caratterizzati nel seguente modo:

> Typically the products of such a research are projects for curricular innovation concerning either the whole mathematics curriculum or some special part of it (e.g. concerning the methods or the contents); or examples of careful modelisation of classroom processes (concerning for ex. the teacher's role). However, such products, unlike those of trend B, are usually given within a theoretically-based frame (with local validity as we shall argue in the following), which itself has been originated by the same research and is rooted in its methodology. (Arzarello, Bartolini Bussi, 1998, p. 350).

In sintesi il nucleo della Ricerca in Didattica della Matematica italiana è quello di cercare di superare la distinzione fra aspetti teorici e pragmatici.

1.3. La ricerca basata su progetti (Design-based Research)

Un altro elemento che caratterizza il progetto MMLab-ER, in questo caso esterno alla RDM, è la ricerca basata su progetti (in inglese Design-based Research) (Pellerey, 2005).

Nel 1992 A. Brown e A. Collins (Brown, 1992; Collins, 1992) in due diversi interventi si posero il problema di una ricerca pedagogica che tenesse conto più direttamente dei contesti nei quali si svolgeva la pratica educativa. La loro proposta assunse il ruolo di una sfida metodologica nell'ambito della ricerca educativa. Nel decennio successivo alla proposta di A. Brown e A. Collins vennero messi in atto vari progetti di intervento educativo, soprattutto centrati sulle istituzioni scolastiche, ispirati alle loro idee. La metodologia venne delineandosi progressivamente nelle sue linee portanti e nei suoi caratteri innovativi. Essa era inizialmente denominata in varie maniere: sperimentazione di progetti o sperimentazione progettuale, valutazione formativa, ricerca evolutiva, studi progettuali, sperimentazione formativa, ricerca ingegneristica; finché negli ultimi anni si è giunti a un'espressione comunemente accettata: Ricerca basata su progetti, in inglese Design-based Research[1].

Il gruppo specialistico collettivo che si occupa di questa tipologia di ricerca così presenta nel suo sito l'approccio denominato Ricerca basata su progetti[2].

Le ricerche sviluppate in contesti educativi hanno avuto storicamente due obiettivi generali: comprendere come la gente impara, particolarmente in contesti scolastici; progettare percorsi che garantiscano meglio in essi un effettivo apprendimento. Perseguire questi due obiettivi contemporaneamente pone sfide significative. Tuttavia, tale impegno ha anche significativi guadagni, in quanto i contesti d'apprendimento possono essere rapidamente adattati in risposta alle ricerche in corso. Negli anni recenti, un nuovo paradigma è emerso per impegnarsi in ricerche di natura teorica in contesti d'apprendimento realistici. La sperimentazione progettuale è un approccio interdisciplinare che riconosce la natura fondamentalmente applicata della ricerca educativa. In questo approccio ricercatori lavorano in collaborazione con educatori per affinare teorie sull'apprendimento progettando, studiando, e mettendo a punto innovazioni in ambienti realistici d'aula che sono ricche e basate su teorie. Se la sperimentazione progettuale vuole svilupparsi come un campo fattibile e robusto, i suoi praticanti devono giungere a un accordo sulla sua natura e i suoi scopi e sviluppare pratiche e metodi condivisi che ci consentono di costruire insieme alle ricerche degli altri, condividere risultati che contribuiscano alla teoria e alla pratica e (alla fine) fornire un significativo apporto a come la gente apprende in un insieme di contesti. (Pellerey, 2005, p.724)

Il gruppo precisa cinque caratteristiche della metodologia:

a) In primo luogo va evidenziato che gli obiettivi fondamentali di progettare ambienti di apprendimento e di sviluppare teorie o «prototeorie» dell'apprendimento sono strettamente interconnessi.

b) Lo sviluppo del progetto sul piano pratico e quello della ricerca legata al controllo delle sue qualità e all'enucleazione dei suoi caratteri

[1] Informazioni sul gruppo di lavoro, sui suoi componenti e i consulenti, sulle attività e sui motivi ispiratori si possono trovare sul sito: *www.designbasedresearch.org*.

[2] Vedi la home-page del sito *www.designbasedresearch.org*.

specifici hanno luogo attraverso continui cicli di progettazione, attuazione, analisi e riprogettazione.

c) La ricerca progettuale deve condurre a teorie condivisibili che aiutino a comunicare agli operatori e ai progettisti implicazioni rilevanti sul piano della progettazione e dell'azione educativa.

d) La ricerca deve render conto di come il progetto funziona in contesti autentici, documentando successi e fallimenti, focalizzando l'attenzione sulle interazioni che affinino la nostra comprensione delle problematiche d'apprendimento coinvolte.

e) Lo sviluppo di tali rapporti e rendicontazioni si basa su metodi che documentino e colleghino processi di attuazione con risultati pertinenti.

Così commenta Pellerey il quadro della Ricerca basata su Progetti:

> In altre parole, alla base delle proposte e delle sperimentazioni sviluppate a partire dagli anni Novanta sta la presa di coscienza dell'importanza della pratica educativa considerata nella sua globalità, sia come contesto che implica una progettazione accurata degli interventi, sia come tribunale di verifica della qualità effettiva degli interventi progettati una volta che essi siano stati messi atto. Il lasciarsi coinvolgere con la realtà quotidiana dell'azione didattica porta inevitabilmente anche la necessità di una costante riflessione retrospettiva durante la stessa attuazione del progetto. Questo, a differenza dei trattamenti psicologici propri delle indagini sperimentali classiche, non può né essere definito a priori in tutti i suoi dettagli, né è possibile impedire un suo adattamento, anche profondo, sulla base dei risultati via via conseguiti, siano essi positivi o negativi. La componente riflessiva e critica è pervasiva lungo tutto il processo: nel momento progettuale iniziale, in quanto occorre valutare e valorizzare studi ed esperienze pratiche precedentemente realizzati, nel momento attuativo, perché occorre seguire da vicino l'andamento della realizzazione del progetto, e infine al termine, per verificarne gli esiti e trarne indicazioni nel caso di una nuova elaborazione teorica o sul piano di una corroborazione dell'impianto teorico da cui si era partiti. (Pellerey, 2005, p. 726).

Da queste prime indicazioni emerge con grande chiarezza il punto di partenza che viene assunto per l'elaborazione di un progetto da validare attraverso la sua applicazione pratica. Esso incarna alcune congetture di natura teorica derivate da studi precedenti. Tuttavia, occorre precisare subito che si tratta in genere di "teorie della pratica" che si ispirano a una particolare epistemologia, la quale tiene conto del ruolo dei contesti culturali e sociali nella costruzione della conoscenza. In tutto ciò è evidente il ruolo dei ricercatori e degli studiosi nell'elaborazione degli impianti progettuali, anche se si insiste spesso sull'apporto degli insegnanti e in genere degli operatori educativi.

Un ulteriore elemento interessante che emerge dalla lettura dell'articolo di Pellerey riguarda il confronto fra queste ricerche e la ricerca-azione.

Posso notare a questo punto le differenze notevoli tra questo approccio e quello della Ricerca-Azione di ispirazione lewiniana. In quest'ultimo, l'emergenza e l'identificazione dei problemi educativi avvengono nell'interazione tra i membri appartenenti a un'istituzione e dei consulenti esterni. La progettazione di interventi innovativi si configura come una risposta, elaborata insieme da consulenti esterni e agenti interni, che è direttamente riferita alle situazioni problematiche individuate. Certamente anche in questo caso l'apporto di categorie interpretative di natura teorica ha la sua importanza, ma è più fortemente incidente la percezione di un bisogno di cambiamento. In altra occasione ho concettualizzato l'elaborazione progettuale come risoluzione di problemi che emergono quando la pratica educativa corrente risulta insoddisfacente, fonte di giudizi negativi o di resistenze da parte o degli educandi o degli educatori stessi. In questi casi si sente profondamente il bisogno di cambiamento. Nell'approccio che stiamo analizzando, sembra che i progetti derivino piuttosto da esigenze derivanti da quadri teorici elaborati dai ricercatori. Si cerca di ottenere una convalida, confutazione o affinamento dell'intervento prospettato da parte della pratica educativa stessa, esaminata attraverso molteplici strumenti di rilevazione. (Pellerey, 2005, p. 728).

Nella conclusione dell'articolo Pellerey riprende alcune osservazioni circa la Ricerca-Azione che a suo avviso possono essere applicate anche alla Ricerca basata su Progetti:

La metodologia della Ricerca-Azione ha trovato non poche difficoltà a essere accolta nell'ambito della comunità scientifica legata all'approccio sperimentalista classico. Se ne criticava la poca affidabilità dei risultati sul piano teorico: essa risultava poco adatta a fornire adeguate giustificazioni sulla base di una rigorosa analisi dei dati raccolti, troppo legata a circostanze emergenti nei contesti pratici, per cui riusciva difficile identificare i caratteri propri dell'intervento prefigurato, mentre le variabili prese in considerazione erano troppe e poco controllate nella loro influenza sul processo e sulle interazioni tra le persone coinvolte nell'azione. In realtà, proprio perché il cuore della proposta lewiniana era legato all'elaborazione e attuazione di interventi pratici che rispondessero a veri problemi individuati nel contesto di riferimento, effettivamente si consideravano come determinanti le intenzioni degli attori coinvolti. La psicologia sociale di derivazione lewiniana ha sempre considerato come minima unità di analisi l'azione umana colta nel suo contesto sociale. [...]

Sia il metodo della Ricerca-Azione lewiniana, sia quello basato su progetti auspicato da Brown e Collins condividono la natura interventista dell'impianto. Tuttavia, come già notato, differiscono sostanzialmente per il punto di partenza dell'indagine e per alcuni caratteri specifici che li caratterizzano ulteriormente. Nel caso della Ricerca-Azione, la presa di consapevolezza e la definizione dell'obiettivo dell'intervento nascono dal contesto pratico nel quale sono coinvolti operatori e consulenti e da una ben guidata costituzione e dinamica del gruppo collaborativo coinvolto. La Ricerca basata su progetti mira a verificare la bontà di un progetto operativo elaborato soprattutto da esperti sulla base di un insieme coerente di assunzioni teoriche. Ambedue cercano di verificare la qualità dell'intervento realizzato a partire dai riscontri che possono cogliere nella pratica attivata. A questo fine possono essere adottati sia metodi quantitativi ispirati a modelli classici di elaborazione dei dati, sia metodi qualitativi di tipo etnografico.

Nel caso della Ricerca-Azione prevale l'attenzione per la dinamica di gruppo e per la ricerca di una condivisione di prospettive e di significati. In quello della Ricerca basata su progetti si accentua una tendenza che può definirsi di tipo ingegneristico, in cui la produzione di un artefatto, nel senso più generale e comprensivo del termine, rimane essenziale. Certo, la Ricerca basata su progetti ha come aspirazione anche quella di individuare principi e orientamenti per l'azione che possano in qualche modo essere generalizzati, mentre la Ricerca-Azione è più direttamente interessata a migliorare realtà istituzionali specifiche. Il tempo ci dirà se l'intuizione originaria di Brown e Collins porterà a una vera e propria corrente di pensiero metodologico nell'ambito della ricerca educativa, una corrente per molti versi analoga a quella ormai diffusa, anche se in maniera spesso confusa, che viene sotto il nome di Ricerca-Azione. (Pellerey, 2005, p. 735).

Capitolo secondo
Il laboratorio di matematica

2.1. Le radici storiche del laboratorio di matematica

L'idea di laboratorio di matematica si associa, di solito, all'idea di laboratorio di informatica. Tuttavia essa ha radici storiche più lontane nel tempo rispetto all'introduzione delle tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione (ICT). Le ricerche sull'innovazione in didattica della matematica fin dall'inizio degli anni '70 mettevano in luce almeno due aspetti in qualche modo collegati all'idea di laboratorio di matematica (Bartolini Bussi, 2007):

- la tradizione, di origine pedagogica e didattica dei metodi attivi, in cui l'uso della manipolazione, opportunamente guidata, si accompagnava alla costruzione di significati anche molto astratti;
- la tradizione, interna alla matematica, dell'uso di artefatti come strumenti teorici collegati alla possibilità di risolvere in modo rigoroso problemi classici.

I metodi attivi hanno una lunga tradizione in pedagogia. Per citare solo alcuni nomi ricordiamo Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), John Dewey (1859-1952) e Maria Montessori (1870-1952).

Gli strumenti hanno avuto spazio all'interno della matematica fin dall'antichità: la geometria di Euclide è la geometria della riga e del compasso; altri tracciatori di curve sono studiati come strumenti di soluzione di problemi e sono ripresi nel '600 come elementi essenziali dei nuovi metodi (si pensi all'appendice sulla Geometria del *Discorso sul metodo* di Descartes). Modelli statici e dinamici riempiono le vetrine degli istituti di Matematica, fino a che il programma Bourbakista sposta l'attenzione dei matematici sulle strutture fondamentali della matematica. Una testimonianza interessante del ruolo che questi modelli hanno avuto nello sviluppo delle ricerche è citata da Campedelli (Bologna, 1928), per descrivere la genesi della teoria delle superfici algebriche:

Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito per dir così in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei modi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. (Campedelli, 1958, p. 168).

Come osserva argutamente Campedelli, "Castelnuovo parla di 'modelli' e di 'vetrine' e quasi soltanto casualmente precisa che non si trattava di oggetti materiali, ma solo di costruzioni della mente, presenti allo spirito, e vive dinanzi agli occhi come se avessero avuto un'esistenza fisica". Ma, si può aggiungere oggi, proprio l'uso metaforico suggerisce la familiarità dell'autore con i modelli disposti in vere vetrine.

Una posizione particolarmente interessante è quella di Giovanni Vailati (1863-1909), filosofo e matematico torinese, che ebbe un ruolo nella discussione sulla riforma Reale della scuola (1909). La posizione di Vailati è espressa dalle seguenti parole:

Scuola come laboratorio, come luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa. [1906, S III, 292] (Giacardi, 2008).

Vailati organizzò nel 1908, per conto dell'UMI, la sezione didattica del IV Congresso dell'International Commission on Mathematics, che sancì la nascita dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Fu una sezione molto ricca e interessante: nella relazione di C. Godfrey sulle scuole inglesi comparve per la prima volta il termine *Laboratory work in mathematics*, e in quella di Vailati l'idea di laboratorio di matematica.

Vailati si inseriva, a questo proposito, in un contesto internazionale che stava cambiando. In particolare, in Francia, Émile Borel (1871-1956) promuove la realizzazione di atelier mathématique dove gli allievi possano costruire con le loro mani modelli, effettuare misurazioni, ecc. Insieme a J. Tannery crea il *Laboratoire d'enseignement mathématique* presso l'Ecole Normale Supérieure per preparare i futuri insegnanti ad un insegnamento laboratoriale. La seguente citazione, presa da una conferenza tenuta da Borel il 3 marzo 1904 al Musée Pédagogique, rende conto della sua idea:

Mais pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de Mathématiques. […].

On a déjà deviné quel pourrait être, à mon sens, l'idéal du laboratoire de Mathématiques: ce serait, par exemple, un atelier de menuiserie; le préparateur serait un ouvrier menuisier qui, dans les petits établissements, viendrait seulement quelques heures par semaine, tandis que, dans les grands lycées, il serait présent presque constamment. Sous la haute direction du professeur de Mathématiques, et suivant ses instructions, les élèves, aidés et conseillés par l'ouvrier préparateur, travailleraient par petits groupes à la confection de modèles et d'appareils simples. Si l'on possédait un tour, ils pourraient construire des surfaces de révolution; avec des poulies et des ficelles, ils feraient les expériences de Mécanique que nous décrivait M. Henri Poincaré, vérifieraient d'une manière concrète le parallélogramme des forces, etc. Il y aurait dans un coin une balance d'épicier; de l'eau et quelques récipients permettraient, par exemple, de faire faire aux élèves, sur des données concrètes, les problèmes classiques sur les bassins que l'on remplit à l'aide d'un robinet et que l'on vide en même temps à l'aide d'un autre robinet, etc. (Borel, 1904, pp. 58-59)[3].

Borel pensa a spazi inseriti nelle strutture educative ma potenzialmente aperti al pubblico, in cui sia possibile trovare e adoperare materiali, libri, riviste, modelli, e naturalmente se vivesse oggi ci metterebbe anche i computer. Borel è ancora legato all'idea ottocentesca di laboratorio come *luogo fisico opportunamente attrezzato*, sul tipo dei gabinetti di fisica o di scienze naturali che molte scuole nella parte finale dell'Ottocento avevano predisposto (in Francia come anche in Italia). I modelli evocati da Borel sono ripresi sia dalla tradizione matematica (modelli di superfici, strumenti per tracciare curve, ecc.) sia dalla tradizione fisica (bilance, vasche da riempire e vuotare, ecc.). È significativo però che l'idea di laboratorio di matematica (a differenza del laboratorio di scienze tradizionale) nasca come luogo di *apprendimento*, e non come luogo di ricerca. Per essere più precisi: non è il luogo in cui fa esperimenti lo scienziato, ma il luogo in cui fa esperimenti lo studente, il cui apprendimento anche in matematica passa attraverso una fase di ricerca e formulazione di congetture. Sottolineiamo un altro aspetto interessante della proposta di Borel: il laboratorio di matematica è un luogo di for-

[3] *http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf*

mazione *trasversale*, che deve servire agli studenti, agli insegnanti e a tutti i cittadini. (Bolondi, 2010).

Erano gli anni in cui in tutta Europa si discuteva su come rinnovare la matematica scolastica, gli anni delle Commissioni internazionali sull'insegnamento.

L'idea di laboratorio di matematica sorge quindi quando si diffonde la riflessione sui modi di apprendimento della disciplina. Timidamente, si andava allargando la base studentesca. Inoltre, era sempre più evidente l'importanza della cultura matematica non solo come mezzo di cultura intellettuale e ginnastica del pensiero (come dicevano i programmi ministeriali italiani post-unitari, in cui fu decisiva l'influenza di matematici di professione come Luigi Cremona e Francesco Brioschi), ma anche come strumento per la comprensione razionale della realtà. Infine, era chiaro che in un mondo che si andava definendo sempre più dipendente dai progressi della scienza e della tecnologia la matematica non poteva più essere solo un 'lusso culturale' per pochi ma doveva acquisire un ruolo centrale nella formazione di tutti giovani.

Solo un anno dopo lo scritto di Borel che abbiamo citato, le stesse idee vengono riprese da Giovanni Vailati nel suo lavoro per la Commissione reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia, istituita dal ministro Bianchi nel 1905. La Commissione arrivò nel 1909 ad elaborare un progetto generale di riforma della scuola (che prevedeva tra l'altro l'istituzione della scuola media inferiore unificata) specificando anche i programmi e le indicazioni metodologiche. Qui trova spazio di nuovo l'idea di sperimentare i fatti matematici, anche prima del momento in cui è possibile farne una trattazione completa di tipo deduttivo; dalla sperimentazione deve iniziare un lavoro di congetture e argomentazioni che porta alle prime vere dimostrazioni e giunge infine ad una trattazione sistematica. Ad esempio, parlando di geometria, Vailati difende con forza la necessità di una esperienza dei fatti salienti relativi alle figure, che precedesse e preparasse la trattazione deduttiva:

> È necessario che in essi [nei programmi scolastici] venga più chiaramente riconosciuta e sanzionata la necessità di far precedere lo svolgimento sistematico della geometria, nello stadio superiore della scuola secondaria, da un insegnamento preliminare nello stadio inferiore, destinato a rendere noti e famigliari agli alunni i fatti geometrici, alla cui spiegazione, o dimostrazione, essi verranno poi condotti ad applicare il ragionamento deduttivo. (Giacardi, 2008).

In Germania il fautore della didattica laboratoriale fu Felix Klein (1849-1945), che fu anche il principale ispiratore del *Meraner Lehrplan* (1905) elaborato dalla Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte (Commissione didattica della società di scienziati tedeschi), che coinvolgeva l'insegnamento della matematica, della fisica e delle altre scienze naturali.

Tale piano prevedeva: l'introduzione del 'pensiero funzionale' nell'insegnamento secondario; l'importanza delle applicazioni; l'uso dei modelli; il collegamento con problemi reali; il collegamento con l'insegnamento della fisica; l'importanza degli esperimenti (fare solo esperimenti che abbiano un significato); la predisposizione di opportuni spazi di lavoro (Arbeiträume); la divisione della classe in gruppi di 16-20 alunni e la preparazione degli insegnanti.

Klein vede nelle calcolatrici meccaniche una concretizzazione del significato matematico del calcolo. Tale posizione è ribadita nel secondo volume delle *Matematiche Elementari da un punto di Vista Superiore*, dedicato alla geometria. Anche in questo caso si illustrano i vari capitoli con macchine reali, che concretizzano relazioni geometriche (trasformazioni nel piano) o funzioni (curve come traiettorie)[4]. (Martignone & Bartolini Bussi, 2010).

I tempi non erano certamente maturi per un approccio alla matematica che non necessariamente ripercorresse la stessa trattazione logica di una disciplina quando questa ha raggiunto un certo livello di completezza. Infatti per ritrovare la parola laboratorio occorre aspettare altri cinquant'anni e un testo di grande importanza per la scuola italiana: la *Didattica della matematica* di Emma Castelnuovo (1964). Qui c'è un capitolo intitolato *La classe come laboratorio di matematica*, in cui viene esplicitato il metodo di lavoro delle classi della Castelnuovo. La sua idea di classe come laboratorio consisteva fondamentalmente in uno 'sporcarsi le mani', costruendo figure, eseguendo calcoli e confronti, misurando, facendo esperimenti, lontano da ogni idea di purismo nell'insegnamento.

I ricercatori e i docenti del gruppo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Roma, coordinato da Lucio Lombardo Radice, possono essere considerati a pieno titolo gli eredi di questa idea di laboratorio che prende forma all'inizio del secolo scorso. Tra i membri

[4] Questi due tipi di macchine (aritmetiche e geometriche) sono tra gli arredi del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena che sarà descritto successivamente.

del gruppo Emma Castelnuovo, che con le sue proposte didattiche e i suoi libri di testo ha influenzato generazioni di insegnanti, me compresa.

"Guardo, osservo e poi passo dal concreto all'astratto, cioè matematizzo il fenomeno osservato": con queste parole Castelnuovo spiega il significato e il ruolo della matematica nel processo di osservazione e di comprensione del mondo. Il ruolo del 'materiale nella scoperta matematica è uno dei temi cari alla ricerca di Castelnuovo: mettere le mani in pasta, sui materiali per andare verso l'astrazione. (Castelnuovo, 2008).

2.2. Il laboratorio di matematica: il contesto nazionale

Dopo un secolo dalla fondazione dell'ICMI, l'approccio alle discipline dell'area matematico-scientifico-tecnologica attraverso attività di laboratorio è ancora poco diffuso nella scuola reale ed è, per questo, al centro di un dibattito a livello nazionale e internazionale.

L'Unione Matematica Italiana (UMI) ha ripreso l'idea di laboratorio, nell'accezione di Klein, elaborandola in modo originale nel progetto curricolare [Matematica per il cittadino]. Il laboratorio di matematica è inteso in questo modo:

> Una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento;

l'appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte. (AA. VV. UMI, 2003, p. 60).

Sono quindi esemplificati alcuni casi di strumenti, che citano espressamente, oltre ai software di geometria e ai software di calcolo simbolico:

La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le macchine che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato degli oggetti matematici differenti ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche di quelle consentite dall'uso di software di geometria dinamica. (AA.VV. UMI, 2003, p. 60).

A questi si possono aggiungere altri casi, tratti dalla storia della matematica o dalle indagini interculturali; strumenti di rappresentazione dei numeri e di esecuzione di calcoli: pallottolieri, abaci, bastoncini cinesi, quipu e strumenti precolombiani, primi strumenti meccanici di calcolo, ecc.

L'idea di laboratorio è stata successivamente ripresa – in un'accezione generale – nell'introduzione al documento [*Indicazioni per il curricolo*, 2007] del Ministero della Pubblica Istruzione[5]:

Realizzare percorsi in forma di laboratorio, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa. Il laboratorio è una modalità di lavoro che incoraggia la sperimentazione e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare-realizzare-valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e che può essere attivata sia all'interno sia all'esterno della scuola, valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento.

L'acquisizione dei saperi richiede un uso flessibile e polivalente degli spazi usuali della scuola, ma anche la disponibilità di luoghi attrezzati che facilitino il processo di esplorazione e di ricerca: per le scienze, l'informatica, le lingue comunitarie, la produzione musicale, il teatro, le attività pittoriche, la motricità.

In particolare, il laboratorio è assunto come elemento fondamentale trasversale a tutte le discipline dell'area matematico-scientifico-tecnologica:

[5]*http://search.pubblica.istruzione.it/search?q = Indicazioni+per+il+curricolo&client = default_frontend&proxystylesheet = default_frontend&output = xml_no_dtd&site = default_collection&filter = p*

Tutte le discipline dell'area hanno come elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico (aula o altro spazio specificamente attrezzato) sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, negozia e costruisce significati interindividuali, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. In tutte le discipline dell'area **inclusa la matematica**, il docente avrà cura di ricorrere ad attività pratiche e sperimentali e a osservazioni sul campo, con un carattere non episodico e inserendole in percorsi di conoscenza (*Indicazioni per il curricolo*, primo ciclo, 2007).

Per poter individuare su quali temi, con quali strumenti, utilizzando quali metodologie un insegnante può cercare di fare laboratorio nel particolare contesto in cui svolge la propria attività vale la pena di fissare alcune caratteristiche del lavoro di laboratorio, così come è stato inteso normalmente dagli estensori dei Curricoli UMI - La Matematica per il Cittadino, 2003[6].

a) In un laboratorio ci sono delle cose da comprendere: dati, fatti, situazioni da osservare, studiare, riprodurre, sistemare. Si entra in laboratorio perché *vogliamo capire qualcosa*. Un laboratorio è quindi un luogo (non necessariamente fisico) in cui si entra con una motivazione forte, legata alla nostra voglia di sapere, in cui si rompono gli schemi scolastici. Per noi insegnanti, la sfida sarà il saper costruire situazioni in cui risvegliare questo ordine di motivazioni.
b) In un laboratorio *si parte dal problema, non dalla sua soluzione*. Questo è un punto particolarmente cruciale per chi si occupa di matematica. Il punto finale di ogni ricerca matematica è la costruzione di una teoria formale, possibilmente generale, cristallina ed essenziale nella sua organizzazione logico-deduttiva, della quale tutte le situazioni concrete che incontriamo sono solo casi particolari. Questo non può essere il punto di partenza per i nostri ragazzi: quando si impara, quando si scopre, quando si cerca di comprendere, c'è anche un lavoro 'sporco' da fare, e questo lavoro non può essere delegato ad altri. Mentalità di laboratorio significa prima di tutto ribaltare questa prospettiva: non esponiamo una teoria, di cui presentiamo esempi, partiamo invece da un problema, una osservazione, un insieme di

[6] *http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html*

dati, e cerchiamo di vedere se riusciamo a costruire una spiegazione razionale e a organizzarla in una teoria.

c) Non è possibile *sapere a priori* di cosa avremo bisogno per comprendere la nostra situazione. Nel laboratorio si crea una situazione in cui si opera e si progetta, mobilitando tutte le conoscenze e le abilità di cui siamo capaci. Gli studenti devono uscire dal tipico schema degli esercizi di matematica, in cui è lo stesso testo che ci indica cosa dobbiamo fare per risolverli, o in che ambito dobbiamo cercare la soluzione (ad esempio esercizi con il più, con il meno e così via)[7], ma devono essere pronti a usare tutti i propri saperi espliciti, e stimolati a esplicitare quelli impliciti.

d) In un laboratorio ben fatto, *il lavoro non è mai individuale*. La collaborazione tra diverse persone può attivarsi su molti piani e in molte forme, ma questo può avvenire solo lavorando su problemi concreti, che coinvolgono i ragazzi e l'insegnante come vere e proprie sfide. Il laboratorio può essere anche uno di quei fondamentali momenti in cui anche i ragazzi normalmente in difficoltà danno contributi, ne sono consapevoli, e i loro contributi sono riconosciuti e condivisi; un momento in cui anche gli studenti che di solito si defilano riescono a lanciarsi, e quelli che ormai hanno 'chiuso' con la matematica provano a rimettersi in gioco.

e) Nel lavoro di laboratorio non si riesce a tracciare *una linea di demarcazione netta tra teoria e pratica*: ogni osservazione fatta sul campo, ogni situazione concreta può diventare spunto per una costruzione teorica; ogni snodo della teoria può essere confrontato con la realtà dei fenomeni.

f) In laboratorio tutto ciò che si fa ha un suo senso, anche gli errori, e contribuisce a costruire il significato dell'insieme di conoscenze al cui interno si opera. Anche i tentativi sbagliati, le strade che si rivelano senza uscita, le ripetizioni e i circoli viziosi in cui ci si ritrova non arrivano per caso, senza senso. In laboratorio è possibile sperimentare la dimensione costruttiva dell'errore. In un laboratorio, im-

[7] A questo proposito mi piace ricordare un episodio che mi capitò anni fa con un alunno di classe prima media. Erano i primi giorni di scuola, avevo presentato un problema da risolvere in classe ed era mia intenzione discutere poi con ragazzi le diverse strategie di soluzione. Un alunno, con l'aria furba, alza la mano e chiede "Prof., che settimana è questa?". "In che senso?" rispondo. "È la settimana del più, del meno, del per o del diviso? Se lei me lo dice io posso fare il problema!".

boccare una strada sbagliata spesso è la chiave per individuare, riflettendo, la strada giusta.

Le caratteristiche descritte esprimono il senso del *laboratorio di matematica*, così come dovrebbe essere; vedremo nel paragrafo successivo qual è la situazione nella scuola reale.

2.3. Il laboratorio di matematica: la situazione nella scuola reale

L'attenzione ai metodi attivi e al laboratorio, anche se è da decenni presente nelle dichiarazioni di intenti degli esperti, nei programmi e nella tradizione della ricerca didattica, non sembra avere avuto effetti rilevanti sulla scuola reale, come segnalato nel Rapporto Berlinguer. È recente (28.04.2008) la presentazione in conferenza stampa dell'indagine conoscitiva sui laboratori scientifici nelle scuole del paese del Gruppo di Lavoro Interministeriale per lo Sviluppo della Cultura Scientifica[8], presieduto dall'on. Berlinguer:

> In Italia la cultura scientifica è poco diffusa e affermata. Questo dipende anche da come la scienza è insegnata. [...] Meno della metà dei docenti porta i ragazzi in laboratorio, per vivere la scienza, come dovrebbe essere. E così la scienza invece di essere esperienza e teoria insieme, resta solo gnoseologia. Cosa fare allora? I dati dell'indagine indicano la via da percorrere. È necessario procedere ad un cambiamento nella didattica scientifica. Gli insegnanti sono la chiave di volta in questa rivoluzione culturale.

Tale rilievo è coerente con la posizione critica assunta alla fine del 2007 dalla Commissione Europea (Rapporto Rocard)[9], che auspica in tutta Europa la diffusione di metodi di Inquiry Based Science Education (IBSE), sottolineando i seguenti elementi:

> A reversal of school science-teaching pedagogy from mainly deductive to inquiry-based methods provides the means to increase interest in science.
>
> Renewed school's science-teaching pedagogy based on IBSE provides increate opportunities for cooperation between actors in the formal and informal arenas.

[8] *http://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/gst/*

[9] *http://ospitiweb.indire.it/adi/RRocard/rr7_frame.htm*

Teachers are key players in the renewal of science education. Among other methods, being part of a network allows them to improve the quality of their teaching and supports their motivation.

La Commissione, nello stesso rapporto, formula, tra le altre, le seguenti raccomandazioni:

Recommendation 1:
Because Europe's future is at stake decision-makers must demand action on improving science education from the bodies responsible for implementing change at local, **regional**, national and European Union level.
Recommendation 2:
Improvements in science education should be brought about through new forms of pedagogy: the introduction of inquiry-based approaches in schools, actions for teachers training to IBSE, and the development of teachers' networks should be actively promoted and supported.
Recommendation 3:
Specific attention should be given to raising the participation of girls in key school science subjects and to increasing their self-confidence in science.
Recommendation 4:
Measures should be introduced to promote the participation of cities and the local community in the renewal of science education in collaborative actions at the European level aimed at accelerating the pace of change through the sharing of know-how.

Questi richiami mettono in luce che la situazione della scuola reale è ben lontana da quanto auspicato sia dalla Indicazioni Curricolari 2007 sia dai documenti dell'UMI. Tuttavia molti dei progetti per la matematica proposti dal MIUR in questi ultimi anni, che coinvolgono migliaia di insegnanti del primo e del secondo ciclo di istruzioni, hanno la caratteristica comune di presentare attività di laboratorio di matematica. I due più noti, fra gli insegnanti, sono m@t.abel[10] e PQM (Progetto Qualità e Merito)[11].

[10] *http://archivio.pubblica.istruzione.it/docenti/allegati/apprendimenti_base_matematica.pdf*

[11] *http://pqm.indire.it/php/*

2.4. Il Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena[12]

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche (di seguito abbreviato in MMLab) nasce nel Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia nel 2002 a partire dal Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica afferente allo stesso Dipartimento e coordinato dalla prof. Maria G. Bartolini Bussi. All'iniziale sede presso il Dipartimento di Matematica (in via Campi, a Modena), si è recentemente aggiunta una seconda sede (in via Tito Livio, sempre a Modena). Lo staff del Laboratorio delle Macchine Matematiche è coordinato da Maria G. Bartolini Bussi ed è formato sia da ricercatori, assegnisti e dottorandi (Michela Maschietto, Francesca Martignone, Rossella Garuti) dell'Università di Modena e Reggio Emilia, sia da insegnanti e soci dell'Associazione delle Macchine Matematiche[13].

Il Laboratorio contiene una collezione di strumenti per la geometria, chiamati appunto macchine matematiche. Le macchine matematiche presenti sono di due tipi:

- **Macchine per l'aritmetica**, cioè strumenti che consentono di rappresentare numeri e di realizzare operazioni aritmetiche (es. semplici calcolatrici meccaniche, abaci);
- **Macchine per la geometria**, cioè strumenti che forzano un punto o una figura a muoversi o a essere trasformati secondo leggi matematiche predeterminate (es. compassi, curvigrafi, prospettografi).

Nella sede di via Campi è allestita un'aula (Fig.1) per accogliere classi di studenti per lo svolgimento di sessioni di laboratorio di matematica. La sede di via Tito Livio ospita la falegnameria per la produzione e la manutenzione delle macchine matematiche (gestita dall'Associazione Macchine Matematiche, che sarà presentata in seguito) e offre una zona espositiva permanente sulla prospettiva.

[12] *http://www.mmlab.unimore.it/on-line/Home.html*

[13] *http://www.macchinematematiche.org/*

Figura 1 - L'aula del MMLab di Modena

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche è essenzialmente un laboratorio di ricerca in didattica della matematica, riconosciuto come tale non solo in Italia ma anche all'estero. La sua attività si è focalizzata sullo studio dei processi di apprendimento e insegnamento della matematica con l'uso di artefatti (per maggiori dettagli, cfr. Capitolo 3). Il libro *Macchine matematiche dalla storia alla scuola* (Bartolini Bussi e Maschietto, 2006) rende conto del lavoro che è stato condotto negli anni. La tematica di ricerca è stata anche oggetto di progetti di ricerca nazionali in diversi anni, progetti che hanno coinvolto altri ricercatori italiani. Il gruppo di ricerca ha negli anni collaborato con numerosi insegnanti di ogni ordine e grado, con i quali sono state condotte sperimentazioni didattiche, ma anche con ricercatori italiani di altre sedi e con ricercatori stranieri.

Il MMLab nasce dall'incontro fra un gruppo di insegnanti di matematica del liceo scientifico "A. Tassoni" di Modena (Martinez, Pergola e Zanoli) e il Nucleo di Ricerca in storia e didattica della matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia (coordinato prima dal prof. Quattrocchi e in seguito dalla prof.ssa Bartolini Bussi) verso l'inizio degli anni '80. Dal punto di vista degli insegnanti le principali esigenze sono rappresentate da queste parole:

Ci si era resi conto che non veniva dedicata sufficiente attenzione all'evoluzione storica dei concetti e delle teorie, correndo il rischio di trasmettere agli studenti una immagine inadeguata della matematica, che poteva apparire come insieme di verità indipendenti dal tempo, dai mutamenti economico-sociali. Inoltre, era molto basso il livello di partecipazione degli studenti alla scoperta e alla discussione delle proprietà e regole che poi dovevano utilizzare, anche perché mancava (o aveva un ruolo marginale) la manipolazione di strumenti e l'impiego di materiali audiovisivi, con cui invece era possibile favorire l'apprendimento di alcuni concetti fondamentali, sottolineare l'importanza che il movimento e la trasformazione degli oggetti hanno in matematica: mostrare cioè lo sfondo operativo delle astrazioni. (Pergola & Zanoli, 2010).

Nei primi anni il laboratorio viveva all'interno del liceo scientifico Tassoni, dove gli insegnanti erano riusciti a ricavarsi un'aula attrezzata con banconi intorno ai quali disporre i gruppi di lavoro e una piccola officina dove sono stati costruiti i primi modelli fisici. A partire dal 1997 la collezione delle macchine matematiche, che nel frattempo si era notevolmente ingrandita, e l'officina sono state ospitate presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena.

Nel 2003 si è costituita l'Associazione Macchine Matematiche che collabora con il MMLab; questo ha due sedi: la prima presso il dipartimento di matematica dell'Università di Modena e funziona come aula attrezzata per attività indirizzate a scolaresche e centro per la ricerca didattica; la seconda, in via Tito Livio 1, che funziona come officina per la produzione delle macchine e spazio espositivo.

2.4.1. Le sessioni di laboratorio per le classi

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche offre la possibilità a classi di studenti di scuola secondaria di svolgere delle sessioni di lavoro sulle macchine. Queste sessioni si differenziano, non solo secondo il grado scolare degli studenti, ma anche secondo gli obiettivi per cui gli insegnanti decidono di portare le proprie classi nel MMLab (ad esempio per introdurre concetti matematici attraverso l'uso di particolari strumenti, oppure per reinvestire le conoscenze teoriche apprese in attività con oggetti concreti, oppure per proporre agli studenti attività che li avvicinino ad aspetti della matematica che spesso a scuola non sono trattati, o ancora per svolgere attività con strumenti che permettano di creare dei percorsi interdisciplinari che coinvolgano, oltre alla Matematica, differenti materie come la Storia, l'Arte, l'Educazione Artistica e Tecnica, ecc.).

Le sessioni di laboratorio organizzate dal MMLab vertono su temi diversi e utilizzano macchine differenti. Nello specifico gli studenti possono esplorare e manipolare delle ricostruzioni di macchine antiche: ad esempio curvigrafi per tracciare le coniche (parabolografi, ellissografi e iperbolografi) o pantografi per svolgere trasformazioni geometriche del piano (pantografi per le simmetrie assiali e centrali, per le traslazioni, per le rotazioni e per le omotetie). I percorsi proposti per le visite al Laboratorio sono: "Coniche e conicografi" (scuola secondaria di secondo grado), "Trasformazioni geometriche del piano" (diversi percorsi a seconda del grado scolare: dalla scuola primaria a quella secondaria), "Triangoli e curve" (scuola secondaria di primo grado), "Il pantografo di Scheiner" (istituti professionali) e "La prospettiva" (scuola secondaria di secondo grado).

Ogni sessione di laboratorio richiede circa due ore ed è condotta da un operatore del laboratorio (un ricercatore o un membro dell'Associazione delle Macchine Matematiche). Nella prima fase l'operatore introduce i riferimenti e le informazioni che permettano di situare nella storia della matematica i concetti su cui verterà la sessione di laboratorio, vedendone lo sviluppo nei secoli attraverso l'analisi di modelli e macchine usate nell'antichità. In questa prima parte vengono anche presentate le macchine che i ragazzi esploreranno nella fase successiva e le indicazioni metodologiche sullo svolgimento della sessione di laboratorio. Nella seconda parte gli studenti diventano protagonisti: infatti, dopo una suddivisione in gruppi, a ciascun gruppo viene data una macchina diversa, con lo scopo di scoprire che cosa fa e capire perché lo fa. Questa attività di gruppo è guidata da specifiche schede diverse da macchina a macchina e diverse a seconda del grado scolare e del tipo di scuola (Martignone e Bartolini Bussi, 2010).

Le schede per l'esplorazione sono date a ciascun gruppo insieme alle macchine con l'indicazione di rispondere alle domande per iscritto: tali risposte devono essere il frutto della collaborazione di tutti i componenti del gruppo e quindi condivise. È inoltre sottolineato che la compilazione della scheda, oltre a guidare l'esplorazione delle singole macchine, può essere utile agli studenti anche come traccia del lavoro svolto (che verrà esposto dal gruppo nella parte finale della sessione). Alla fine dell'esperienza tutti i materiali prodotti dai ragazzi (schede di lavoro e disegni), insieme ad alcuni materiali di supporto (ad esempio: le presentazioni del percorso e delle macchine e i dati tecnici e storici riguardanti gli strumenti analizzati), sono consegnati all'insegnante della classe per una possibile ripresa del lavoro e il reinvestimento in classe delle attività svolte nel MMLab.

Tutte le sessioni di laboratorio si concludono con la presentazione, svolta dagli studenti e orchestrata dall'operatore del laboratorio, delle diverse macchine esplorate durante l'attività dei gruppi e con una discussione di bilancio. Si tratta quindi di una fase di istituzionalizzazione importante, in quanto il lavoro di ogni gruppo è condiviso e riconosciuto all'interno del gruppo classe e dall'insegnante. Questo momento finale ha diverse finalità: quella di presentare le diverse macchine date ai gruppi e quella di mettere gli studenti nelle condizioni di poter comunicare, anche con un linguaggio non formale, il lavoro e le scoperte fatte. In questo modo gli studenti assumono un ruolo diverso: non solo quello di recettori di conoscenze, ma anche quello di portatori di conoscenze da condividere con la classe. A questo proposito è importante sottolineare la valenza educativa dell'abituare gli studenti a comunicare e ad argomentare, non solo in matematica, ma in tutti gli ambiti.

Le attività di laboratorio di matematica del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena seguono quindi le indicazioni proposte dalla Commissione UMI nel progetto curricolare *Matematica per il cittadino* e le idee esposte sinteticamente nei paragrafi precedenti.

2.4.2. Le macchine matematiche oltre la scuola

Le macchine matematiche sono adatte ad essere esposte al pubblico, nell'ottica di contribuire alla diffusione della cultura scientifica (Maschietto, 2007). Numerose mostre sono state organizzate nel corso degli anni, non solo in Italia ma anche all'estero, con lo scopo di divulgare un modo di 'far matematica' complementare rispetto a quello tradizionalmente offerto nella scuola. Tuttavia, esse si sono rivolte e si rivolgono non solo alle scuole ma anche al grande pubblico, nella consapevolezza che l'innovazione didattica richiede modifiche nell'immagine pubblica della matematica, per ciò che riguarda aspetti affettivi e culturali. L'attenzione agli aspetti affettivi si manifesta nella ricerca di modi per costruire un atteggiamento positivo verso la matematica. L'attenzione agli aspetti culturali si manifesta nella ricerca di modi di presentare la matematica come parte della cultura umana, in stretta connessione con l'arte, la tecnologia e la vita di tutti i giorni (Bartolini Bussi & Maschietto 2006). L'attività espositiva ha avuto inizio nel 1992 con la mostra *Macchine matematiche e altri oggetti*, allestita nel Palazzo Comunale di Modena. Questa mostra rese evidente l'interesse didattico della collezione di macchine. Un'esposizione di lunga durata fu organizzata al Museo dell'Automobile di Torino (*Dal compasso al computer*, 1996).

Nel 1998 fu allestita la mostra *Theatrum Machinarum* presso il Foro Boario di Modena, in collaborazione con gli insegnanti che avevano realizzato le macchine matematiche. Questa mostra divenne itinerante ed ebbe allestimenti a Cesenatico (in occasione della Finale Nazionale delle Olimpiadi, nel 2000, anno della Matematica), a Cesena (2002) e a Treviso, con il titolo *Le Matemacchine* (2002). Nel 2003 si preparò una mostra itinerante, *Geometria a tu per tu*[14], destinata a circolare nelle scuole, attraverso una convenzione con l'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia-Romagna[15]. La mostra fu invitata al secondo Festival della Scienza di Genova (2004).

Nel 2002 fu allestita per la prima volta la mostra sulla prospettiva *Perspectiva Artificialis* a Firenze (Limonaia di Villa Strozzi), su invito del Giardino di Archimede, poi replicata a Modena nel 2003, e più recentemente nel 2008 a Cremona e nel 2009 al Festival della Matematica di Roma (Auditorium Parco della Musica).

Nell'autunno del 2004, una mostra ridotta (*Apparenza e realtà*) fu preparata in occasione del Mese della Scienza per ragazzi a Modena. Questa mostra è stata esposta, per conto dell'UMI, alla finale nazionale delle Olimpiadi di Matematica (Cesenatico, 2005) ed è stata invitata al terzo Festival della Scienza di Genova (2005) e a Bergamoscienza (2005) insieme a *Geometria a tu per tu*.

Le mostre *Theatrum Machinarum* e *Perspectiva Artificialis* furono corredate da cataloghi digitali, disponibili sul sito del Laboratorio. Il catalogo multimediale della seconda mostra e un demo con numerose animazioni furono tra i sei finalisti del Pirelli INTERNETional Award, generazione Alice (2004). Sempre sulla mostra *Perspectiva Artificialis* si è recentemente pubblicato il catalogo digitale[16] dell'allestimento di Cremona, contenente anche la testimonianza dei laboratori realizzati e condotti dagli studenti del Liceo Scientifico Aselli che hanno affiancato la mostra.

Sul tema della divulgazione scientifica, il Laboratorio (anche quando formalmente non ancora nato, ma esistente come Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento) ha partecipato a diversi progetti, anche a livello europeo. Uno di questi è il progetto *Maths Alive: Mathematics in ever-*

[14] Catalogo in rete: *http://www.mmlab.unimore.it*

[15] *http://www.matematicainsieme.it*

[16] La pubblicazione on-line del catalogo sul sito: *www.mmlab.unimore.it* è prevista a breve.

yday life, coordinato da Albrecht Beuthelspacher (Giessen, Germania) e finanziato dalla Commissione Europea, nell'ambito del Quinto Programma Quadro (1999-2002). Si trattava di una rete tematica che comprendeva diversi matematici che si stavano interessando alla divulgazione matematica: gli autori della mostra *Oltre il compasso* (Franco Conti ed Enrico Giusti), il gruppo milanese coordinato da Maria Dedò (*Simmetria e giochi di specchi*), il gruppo portoghese *Atractor*, coordinato da Manuel Arala Chaves.

Nel 2004, il Laboratorio ha allestito lo stand Macchine Matematiche all'interno del *5ème Salon de la Culture & des Jeux mathématiques*, organizzato a Paris dal Comité International de Jeux Mathématiques[17]. Nel 2008, uno stand è stato allestito all'isola della Réunion, su invito dell'IREM, nell'ambito della Festa della Scienza, organizzata in occasione del semestre di presidenza francese della Comunità europea.

[17] *http://www.cijm.org/*

Capitolo terzo
Il quadro teorico del progetto MMLab-ER

3.1. Introduzione

Il quadro di riferimento teorico del progetto MMLAb-ER tiene conto di diversi elementi che saranno descritti nei paragrafi successivi, in particolare mi soffermerò sui principali elementi teorici sottesi a ciò che avviene in un *laboratorio* quando si utilizzano *strumenti* per fare *attività matematiche.* Il principale riferimento è il costrutto della *mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008 e 2009) generato con l'obiettivo di rendere conto dei processi che avvengono in attività didattiche specifiche descritte da Bartolini Bussi & Mariotti come:

> the long term processes started and controlled by the teacher, who aims at making students learn mathematical meanings and procedures by means of suitable tasks requiring the use of certain artifacts. (Bartolini Bussi, 2009c).

Il progetto MMLab-ER si colloca all'interno del paradigma italiano della *Ricerca per l'innovazione* (descritto nel cap. 1) nel quale sono fondamentali tre componenti:

- la componente *epistemologica*: analisi dei contenuti matematici;
- la componente *cognitiva*: analisi dei processi individuali di apprendimento;
- la componente *didattica*: analisi dei processi di insegnamento-apprendimento. (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998).

In questo capitolo si richiamano le nozioni teoriche che consentono l'analisi di queste componenti: in particolare il quadro della *mediazione semiotica* fornisce elementi per l'analisi degli aspetti didattici e cognitivi presenti nelle attività di laboratorio con artefatti. Per quanto riguarda la componente epistemologica, essa si colloca a due livelli diversi: l'analisi del particolare contenuto matematico 'incorporato' in uno specifico artefatto (ad esempio un pantografo per la simmetria assiale o una macchina per il calcolo come la Pascalina) e l'analisi della particolare attività matematica coinvolta, nel nostro caso la produzione di congetture, argomentazioni e dimostrazioni matematiche.

3.2. La mediazione semiotica: artefatti e segni

3.2.1. *Artefatti e conoscenza*

Nel campo della pratica gli strumenti hanno sempre rivestito un ruolo cruciale: spesso problemi pratici sono in relazione con l'uso di artefatti, in modo tale che spesso il processo di soluzione di un problema dato e la progettazione e la progettazione di un artefatto espressamente progettato per sostenere quella soluzione si sono sviluppati vicendevolmente. Si può anche osservare che la costruzione e l'uso di artefatti sembra essere una caratteristica dell'attività umana, ma ancor più tipica degli esseri umani sembra essere, al di là dell'aspetto pratico, la possibilità che tali artefatti diano un contributo a livello cognitivo.

Norman D. A. nel suo articolo *Cognitive artifatcs* (1991) definisce gli artefatti cognitivi

> those artificial devices that maintain, display, or operate upon information in order to serve a representational function and that affect human cognitive performance. (Norman, 1991, p. 17).

In altre parole tutte quelle cose fatte dall'uomo che sembrano aiutare e sviluppare le nostre abilità cognitive; alcuni esempi sono il calendario, i computer, o semplicemente legarsi al dito un cordino (non in senso metaforico) per ricordarsi qualcosa. Norman sostiene che aver messo la parola *cognitive* vicino ad *artifacts* indica un'associazione con il campo delle Scienze cognitive e della Psicologia cognitiva che però, in generale, considerano gli aspetti cognitivi legati essenzialmente alla 'mente' e quindi possono essere studiate in modo relativamente indipendente dal mondo materiale e dal contesto concreto (*true*) dell'individuo.

> Thus, we know much about cognitive processes such as attention, perception, and memory, but proportionately little about the information processing roles played by artifacts and how they interact with the information processing activities of their users. (Norman, 1991, p. 17).

L'aspetto interessante dell'articolo di Norman, ripreso nel libro *Things That Makes us Smart* (1993), è la doppia natura degli artefatti cognitivi:

- l'aspetto *pragmatico o esperienziale*: cioè l'orientamento verso l'esterno che consente di modificare l'ambiente circostante (*system view*);

- l'aspetto *riflessivo*: che è orientato verso l'interno e consente a chi usa gli artefatti di sviluppare intelligenza (*personal view*).

L'idea di artefatto è molto generale e si riferisce a molte tipologie di oggetti prodotti dall'attività umana nel corso della sua storia: suoni, gesti, utensili e attrezzi, forme orali e scritte di linguaggio naturale; testi e libri, strumenti musicali, strumenti scientifici, mezzi tecnologici di informazione e comunicazione. Il contributo degli artefatti all'educazione non è una novità: da moltissimo tempo i libri sono i principali artefatti usati nella scuola, ma non vanno dimenticate carta e matita. Più in generale, il passaggio dall'ambito della pratica a quello dell'intelletto e viceversa può essere considerato uno dei motori fondamentali dello sviluppo.

È indubbio che il linguaggio, fra tutte queste forme, sia orale che scritto, assume un ruolo centrale tra gli artefatti prodotti ed elaborati dall'attività umana. Studi approfonditi sullo sviluppo da culture orali a culture scritte narrano la storia di una affascinante evoluzione dei modi di pensare. Per quanto riguarda la matematica, vale la pena ricordare che l'uso della scrittura potrebbe essere, come affermano alcuni storici (Cambiano, 1997), correlata alla nascita del ragionamento deduttivo nel campo della geometria, che ha in Talete uno dei suoi iniziatori e in Euclide il maggior esponente.

È affascinante l'analisi che ne fa M. Serres nel suo *Les Origines de la Géométrie* (1993):

Naquit-elle d'un transport par mer, dans le dialogue des Greces et des Egyptiens et parmi leurs rapports? Mais, d'abord, quelle géeométrie? Celle de Thalès. Qu'est-elle, en pratique? Non point dans les idées qu'elle suppose, mais dans l'activité qui la pose. D'abord, un art graphique du dessin, ensuite un langage qui parle de ce dessin tracé, present ou absent. (M. Serres, 1993, p. 169).

Solon, Thalès, arrivent en Egypte: un systèm quasi algébrique entre en court-circuit avec un systèm proto-géométrique. Un discourse encontre une image. Un formalisme découvre une forme. Une convention vient au contact d'une intuition. Comment alphabétiser un hiéroglyphe? En discourant d'un dessin. Comment analyser, dichotomiser ce signe qui désigne un schéma?

Qu'est-ce que la géeométrie? Oui, les discourse d'un dessin.

De quoi faut-il rendre compte? De l'émergence de l'abstrait [...]. Voici un sistème signalétique fidèle aux objets, mais qui ne peut évaluer de soi cette fidélité.Voilà, face à lui, un système des signes qui désigne des signes. [...]. L'un décrit des mots-choses, l'autre anlyse des mots-signes. La rencontre a produit l'abstraction. (M. Serres, 1993, p. 175).

La conclusione che può essere tratta dalla complessa discussione sulle implicazioni dello sviluppo della scrittura e del suo uso riguarda il ruolo che può essere svolto da un certo artefatto nell'emergere di ciò che viene chiamato pensiero razionale, ossia del pensiero basato sulle idee astratte, asserzioni generali e ragionamenti deduttivi.

L'esempio della scrittura e della sua storia nel configurare modi di pensiero, e in particolare della matematica, conduce a riflettere sul ruolo cognitivo delle rappresentazioni e all'osservazione fondamentale che le rappresentazioni emergono dall'attività umana che le rende possibili; in altre parole, ogni rappresentazione è supportata da un artefatto. Il processo di costruzione della conoscenza matematica non è direttamente e semplicemente legato alla pratica, e nemmeno semplicemente legato all'utilizzo degli artefatti. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Esempio 1: il compasso

La definizione del cerchio, come figura geometrica, è certamente legata all'uso del compasso, che d'altra parte consente di realizzare la rappresentazione grafica del cerchio stesso; ma il passaggio dal disegnare forme rotonde al concetto di cerchio in senso geometrico (il luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro) non è immediato. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Esempio 2: Calcolatrice e Registratore di cassa

L'avvento delle calcolatrici e registratori di cassa nei supermarket ha modificato il modo di effettuare la sottrazione rispetto a quando il resto veniva calcolato per completamento (A+? = B). Per calcolare il valore? (resto), un tempo il negoziante utilizzava questo metodo: si parte dal valore A e si conta fino a raggiungere il valore B ottenendo così il risultato C dell'operazione A-B = C. In questo caso l'artefatto era rappresentato dalle dita o dalla sequenza interiorizzata dei numeri. Il nuovo artefatto, la calcolatrice di cassa, cambia questo modo di calcolare il resto, in quanto questo viene evidenziato nella calcolatrice e il compito del/della cassiere/a è quello di leggere il resto. Nell'uno e nell'altro caso, in modo diverso, lo strumento influenza la procedura di calcolo del resto. Nell'uno e nell'altro caso il passaggio dal calcolo del resto al significato matematico di sottrazione non è scontato.

Il primo esempio rende conto del legame fra gli strumenti (riga e compasso) e la geometria euclidea classica. Nel secondo esempio si evidenzia il legame fra artefatti e procedure di calcolo.

3.2.2. L'analisi cognitiva di Rabardel

Rabardel (1995) opera nel campo dell'ergonomia cognitiva e propone una distinzione tra artefatto e strumento: l'artefatto è l'oggetto materiale o simbolico indipendentemente da chi lo utilizza; lo strumento è invece un'entità duplice costituita dall'artefatto e dagli schemi di utilizzazione. Tale distinzione è importante perché aiuta ad analizzare le potenzialità dell'artefatto e il reale utilizzo che è consentito, sottolineando la prospettiva oggettiva e quella soggettiva. Lo strumento è definito da Rabardel come:

> Un'entità mista composta sia da componenti legate alle caratteristiche dell'artefatto che da componenti soggettive (schemi d'uso). Questa entità mista tiene conto dell'oggetto e ne descrive l'uso funzionale per il soggetto. (Rabardel & Samurçay, 2001).

L'artefatto di per sé non ha alcun valore strumentale, diventa strumento attraverso un processo o *genesi strumentale* che avviene con la costruzione di schemi di utilizzazione personali e/o, più in generale, con l'appropriazione di schemi di utilizzazione socialmente pre-esistenti.

La *genesi strumentale* avviene grazie all'interazione di due processi complementari, *strumentazione* e *strumentalizzazione*.

> I processi di *strumentalizzazione* sono relativi all'emergere e allo sviluppo delle componenti 'artefatto' dello strumento: selezionare, raggruppare, produrre e istituire le funzioni dell'artefatto, trasformarlo nella struttura, nel funzionamento, oppure la progressiva ricognizione dei suoi potenziali e dei suoi limiti. I processi di *strumentazione* sono invece relativi all'emergere e allo sviluppo degli schemi d'uso: la loro costituzione, il loro funzionamento, la loro evoluzione e anche l'assimilazione di artefatti nuovi a schemi già costituiti, ecc. Ciò che distingue questi due processi è l'orientamento dell'attività: nei processi di strumentazione essa è orientata verso il soggetto stesso, mentre nel processo di strumentalizzazione è orientata verso la componente artefatto dello strumento. (Rabardel, 1997, p. 6).

Come sottolineano Bartolini e Mariotti (2008), l'approccio strumentale di Rabardel contiene componenti di carattere psicologico che impediscono di considerare come neutrale il ricorso all'uso di uno strumento: esso dà origine a una riorganizzazione delle strutture cognitive, grazie a schemi d'uso che hanno nel *contempo una dimensione individuale e una dimensione sociale* (Rabardel, 1997). Inoltre, in fase di progettazione dell'attività di insegnamento-apprendimento, la distinzione fra artefatto e strumento rende possibile analizzare separatamente le caratteristiche di un artefatto. Permette di osservare le sue parti costitutive e il suo funzionamento e di considerare gli scopi per i quali è stato progettato. Ma è soprattutto al suo potenziale semiotico, come vedremo, che va dedicata grande attenzione poiché l'artefatto-strumento è utilizzato affinché emergano i significati matematici che incorpora.

3.2.3. L'approccio di Vygotskij

L'idea di *artefatto cognitivo*, introdotta da Norman, ha le sue basi nel lavoro di Vygotskij, che permette di analizzare la complessa interrelazione di fattori biologici, storici e socio-culturali che caratterizzano i processi educativi e assegna grande importanza agli artefatti e ai codici culturali, primo fra tutti il linguaggio. Vygotskij, confrontando gli animali e gli esseri umani, ha postulato due linee per l'origine dell'attività mentale umana: la linea naturale (per le funzioni mentali elementari) e la linea sociale e culturale (per le funzioni psichiche superiori).

Questi due elementi (sociale e culturale) sono in correlazione con due nozioni chiave introdotte da Vygotsky: quella di *zona di sviluppo prossimale* e quella di *interiorizzazione,* e in particolare con il ruolo cruciale che riveste l'uso degli artefatti in relazione al processo di interiorizzazione. La zona *di sviluppo prossimale* è uno spazio metaforico i cui confini si determinano osservando il problem solving autonomo del bambino e quello reso possibile dall'aiuto dell'adulto o di pari più competenti. Essa modella il processo di apprendimento attraverso l'interazione sociale ed è definita come:

> la distanza tra il livello reale di sviluppo del soggetto determinato dalla capacità di risolvere da solo un problema e il livello di sviluppo potenziale determinato dalla capacità di risolvere il problema sotto la guida dell'adulto o in collaborazione con un suo coetaneo più capace. (Vygotskij, 1978, p. 86).

Nel quadro teorico introdotto da Bartolini Bussi & Mariotti (2008) l'asimmetria della definizione di zona di sviluppo prossimale si adatta bene, nel contesto scolastico, all'asimmetria che si ritrova nella relazione tra insegnanti e alunni in relazione alla conoscenza. Inoltre questo costrutto mette in relazione la tensione potenziale dell'alunno verso l'apprendimento e l'azione dell'insegnante. Nella zona di sviluppo prossimale lo sviluppo cognitivo è organizzato dal processo di *interiorizzazione*.

L'*interiorizzazione* è un fondamentale processo di carattere evolutivo che, sollecitato attraverso l'interazione sociale, consente a funzioni che sono inizialmente attivate all'esterno da e verso altri più 'esperti' di operare successivamente anche verso se stessi.

> Ogni funzione nel corso dello sviluppo culturale del bambino fa la sua apparizione due volte, su due piani diversi, prima su quello sociale, poi su quello psicologico, dapprima fra le persone come categoria interpsichica e poi all'interno come categoria intra-psichica. Ciò vale ugualmente per l'attenzione volontaria, per la memoria logica, per la formazione dei concetti e per lo sviluppo della volontà. (Vygotskij, 1974, p. 201).

> Per la prima volta in psicologia, ci troviamo di fronte ad un problema così importante come quello della relazione tra funzioni mentali interne ed esterne […] ogni processo interno superiore è sempre stato esterno, cioè è stato per gli altri ciò che ora è per il soggetto. Ogni funzione psichica superiore, necessariamente attraversa un passaggio esterno nel suo sviluppo perché inizialmente è una funzione sociale. Questo è il centro dell'intero problema del comportamento interno ed esterno […] Quando parliamo di un processo, con il termine 'esterno' intendiamo 'sociale'. Ogni funzione psichica superiore è stata esterna poiché è stata sociale in qualche momento, prima di divenire una funzione interna, veramente mentale. (Vygotskij, 1981, p. 162, citato da Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 750).

Due sono gli aspetti che caratterizzano il processo di interiorizzazione: il processo esterno è essenzialmente *sociale*; il processo interno è organizzato e guidato da *processi semiotici*. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Come è noto, Vygotskij ha focalizzato i suoi studi sulle funzioni svolte dal linguaggio naturale, cioè sui processi semiotici relativi all'uso della lingua e all'apprendimento. L'uso delle parole e delle forme linguistiche è interpretato secondo l'ipotesi generale che lo sviluppo del bambino consiste in una appropriazione progressiva e un uso riflessivo dei modi di comportamento che gli altri usano nei suoi confronti. L'analisi del processo di interiorizzazione va dunque centrata sull'analisi del funzionamento del linguaggio naturale e di altri sistemi semiotici usati nella società.

L'uso dei segni nella soluzione di un compito possiede due importanti funzioni cognitive: il soggetto produce segni da un lato proprio per realizzare il compito, dall'altro per comunicare con i diversi compagni che collaborano a tale compito. Nel secondo caso, la produzione di segni risulta strettamente legata al processo di interpretazione che permette lo scambio di informazione e, conseguentemente, la comunicazione.

Le funzioni psichiche superiori si sviluppano attraverso la produzione e l'interpretazione dei segni: in particolare parlare (o scrivere) e interpretare cosa viene detto (o scritto), in altre parole, interagire attraverso la comunicazione.

> Pensare e dare senso (nella società così come nella scuola) deve essere inteso come un processo socio-semiotico nel quale testi orali e scritti [...] interagiscono continuamente da parte degli interlocutori o anche si coordinano in un testo rivisto che è il prodotto finale dell'intero gruppo. (Carpay & van Oers, 1999, p. 303, cit. da Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 278)).

Questa osservazione si rende necessaria e cruciale, poiché la funzione cognitiva relativa all'uso dei segni cambia a seconda della funzione che i segni hanno nell'attività. In particolare, se si tiene conto della specificità delle attività scolastiche.

> le espressioni di ciascuno degli interlocutori sono determinate dalla posizione che occupano in una certa specifica organizzazione sociale. (Carpay & van Oers, 1999, p. 302, cit. da Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 278).

Questa osservazione risulta cruciale quando si consideri la posizione asimmetrica dell'insegnante e degli studenti rispetto alla matematica. Questa distinzione emergerà chiaramente quando introdurremo la nozione di *strumento di mediazione semiotica*.

Vygotskij mette in risalto che nella sfera pratica gli esseri umani ricorrono ad artefatti, perseguendo obiettivi che rimarrebbero al di fuori della loro portata; nel mentre le attività mentali sono supportate e sviluppate per mezzo dei segni, che sono i prodotti del processo di interiorizzazione e che nella terminologia vygotskiana vengono definiti *psychological* *tools*. I primi sono diretti all'esterno, mentre i secondi sono diretti all'interno. Si tratta di una prospettiva coerente con quanto discusso in precedenza.

Il ruolo fondamentale che rivestono gli artefatti nello sviluppo cognitivo è stato ampiamente considerato, ma a differenza di altri approcci psicologici che separano nettamente gli artefatti concreti e tecnologici dai segni, la prospettiva vygotskiana stabilisce tra essi un'analogia.

> L'invenzione e l'utilizzo dei segni come mezzi ausiliari per la risoluzione di un problema dato (ricordare, confrontare qualcosa, scegliere e così via) sono analoghe all'invenzione e all'utilizzo di strumenti sotto il profilo psicologico. I segni hanno funzione di strumento durante l'attività psicologica, analogamente al ruolo di un utensile nel lavoro. (Vygotskij, 1978, p. 52).

I segni non sono solo segni linguistici, ma anche altro:

> Si possono citare alcuni esempi di strumenti psicologici e dei loro complessi sistemi, come segue: il linguaggio, vari sistemi di conteggio, tecniche mnemoniche, sistemi simbolici algebrici, opere d'arte, scrittura, schemi, diagrammi, mappe, disegni meccanici e tutti i tipi di segni convenzionali, ecc. (Vygotskij, 1981, p. 137).

Questa osservazione è importante per la matematica in generale e per l'educazione matematica in particolare, in quanto gli oggetti matematici richiedono una rappresentazione esterna per poterli manipolare.

3.2.4. *La mediazione semiotica di Bartolini Bussi e Mariotti*

Il termine *mediazione* è molto comune all'interno della letteratura educativa, ed è usato per riferirsi alla potenzialità di incoraggiare la relazione fra allievi e il sapere, la matematica nel caso specifico in relazione allo svolgimento di un compito. L'analogia fra segni e artefatti si basa sulla funzione di mediazione che entrambi hanno nello svolgimento di un compito. Hasan (2005) sostiene che:

> Il sostantivo *mediazione* deriva dal verbo mediare, che si riferisce ad un processo con una complessa struttura semantica che include i seguenti partecipanti e circostanze che sono potenzialmente rilevanti in questo processo:
>
> 1. qualcuno che media, il mediatore;

2. qualcosa che viene mediato, il contenuto/forza/energia rilasciato dalla mediazione;
3. qualcuno/qualcosa soggetto alla mediazione, il ricevente a cui la mediazione apporta qualche differenza;
4. la circostanza della mediazione;
a. i mezzi della mediazione, la modalità;
b. il luogo, il sito in cui la mediazione può avvenire.

Queste complesse relazioni semantiche non sono evidenti in ogni uso grammaticale del verbo, ma sommerse sotto la superficie e possono essere riportate alla luce tramite associazioni paradigmatiche, per esempio le loro relazioni sistemiche. (Hasan, 2002).

Il modello di Hasan è inserito esplicitamente nel quadro Vygotskiano e include tutti gli elementi rilevanti per quanto riguarda la modellizzazione delle attività di insegnamento-apprendimento da un punto di vista semiotico.

Il legame tra artefatti e segni può essere facilmente riconoscibile, ma quello che deve essere sottolineato è il legame tra i segni e i contenuti da mediare e il modo in cui tutti questi legami possono essere sfruttati in una prospettiva educativa. Il punto principale è quello di sfruttare il sistema di relazioni tra artefatto, compito e conoscenza matematica. Da un lato un artefatto è messo in relazione ad un compito specifico (si vada la definizione di strumento data da Rabardel) a cui fornisce mezzi di soluzioni adatti, dall'altra parte lo stesso artefatto è collegato ad una specifica conoscenza matematica. In ciò, un doppio legame semiotico è riconoscibile tra un artefatto e una conoscenza. In tal senso è possibile parlare della polisemia di un artefatto. In linea di principio, un esperto può dominare tale polisemia, anche se in molti casi ciò può avvenire in modo incoscio.Che cosa avviene in un laboratorio di matematica quando viene introdotto un artefatto? Il costrutto della mediazione semiotica descritto da Bartolini Bussi & Mariotti (2009) rende conto di questo.

Da un lato la relazione tra artefatto e conoscenza può essere espressa da alcuni segni, culturalmente determinati, prodotti dallo sviluppo culturale e cristallizzanti il significato delle operazioni compiute con l'artefatto.

Dall'altro lato, la relazione tra l'artefatto e il compito può essere espressa dai segni, spesso contingenti alla situazione determinata dalla soluzione di un compito particolare (situati): una caratteristica fondamentale di tali segni è che il loro significato mantiene un forte legame con le operazioni svolte.

Gesti, disegni o parole possono essere i diversi mezzi semiotici utilizzati per produrre questi segni, la produzione dei quali può essere spontanea o esplicitamente richiesta dal compito stesso. Può inoltre succedere che l'esperto introduca nuovi segni. Questo ultimo caso pare rilevante da una prospettiva educativa. La relazione (si veda la Figura 1) tra questi due sistemi paralleli di segni, correlati ad un artefatto, non è certamente né evidente né spontanea. È proprio per questa ragione che noi affermiamo che:

> ***la costruzione di questa relazione diventa un cruciale scopo educativo che può essere realizzato promuovendo l'evoluzione dei segni che esprimono la relazione tra l'artefatto e i compiti in segni che esprimono la relazione tra artefatto e sapere.***

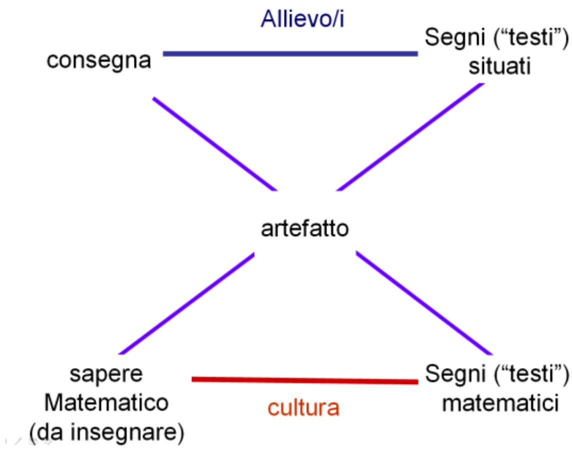


Figura 1 - La mediazione semiotica

I segni che emergono dalle attività svolte con gli artefatti sono elaborati da un punto di vista sociale: in particolare, essi possono essere intenzionalmente utilizzati dall'insegnante per sfruttare i processi semiotici, con lo scopo di guidare l'evoluzione dei significati all'interno della classe. In particolare, l'insegnante può guidare lo sviluppo verso ciò che è riconoscibile come matematica. Dal nostro punto di vista questo corrisponde al legame tra sensi personali (nella prospettiva di Leont'ev, 1964/1976, p. 244) e significati matematici, ovvero alla relazione tra concetti quotidiani e concetti scientifici. (Vygotskij, 1934/1990, p. 286).

Così facendo l'insegnante agirà sia a livello cognitivo che meta-cognitivo, in entrambi i casi promovendo lo sviluppo dei significati e guidando gli alunni alla consapevolezza del loro 'status' matematico. In sintesi: da un lato i significati personali sono legati all'uso di artefatti, in particolare allo scopo di svolgere un compito; dall'altro i significati matematici possono essere legati all'artefatto e al suo uso.

A causa di questa doppia relazione l'artefatto può funzionare come un mediatore semiotico e non semplicemente come un mediatore, ma una tale funzione di mediazione semiotica non è attivata automaticamente. Noi sosteniamo che la funzione di mediazione semiotica di un artefatto possa essere utilizzata da un esperto (in particolare l'insegnante) che sia consapevole del potenziale semiotico dell'artefatto sia in termini di significati matematici che in termini di significati personali. Tale evoluzione è favorita dall'azione dell'insegnante, che guida il processo di produzione e sviluppo dei segni centrati sull'utilizzo di un artefatto. In termini di mediazione noi possiamo esprimere questo complesso processo come segue: l'insegnante agisce come mediatore che utilizza l'artefatto per mediare contenuti matematici agli studenti. In altre parole: l'insegnante utilizza l'artefatto come strumento di mediazione semiotica.

A causa dell'importanza culturale di questo processo noi possiamo definire l'insegnante un mediatore culturale. Tale espressione non si riferisce all'atto concreto dell'utilizzare uno strumento per svolgere un compito, ma piuttosto al fatto che significati nuovi, legati al reale utilizzo di uno strumento, possono essere generati e possono evolvere sotto la guida di un esperto.

Così un artefatto sarà chiamato strumento di mediazione semiotica quando sarà usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente. Di fatto, l'uso dell'artefatto deve essere completamente integrato nell'attività della classe. Il punto chiave nella nostra ipotesi è che il duplice ruolo giocato dall'artefatto come mezzo per realizzare un compito e come uno strumento di mediazione semiotica per raggiungere un obiettivo didattico può essere sfruttato completamente. Il ruolo dell'insegnante è cruciale e non accidentale e la sequenza didattica deve avere certe peculiarità. La parte che segue è dedicata a descrivere le caratteristiche principali di una sequenza didattica, in coerenza con le ipotesi che precedono. Lo chiameremo ciclo didattico. Secondo la particolare metodologia della nostra ricerca, esso può essere considerato un risultato del processo complesso nel quale il progetto di un esperimento e la riflessione sui risultati di esso non seguono un ordine lineare, ma, piuttosto, si influenzano reciprocamente, in modo che la teoria e la pratica siano generate insieme (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998, p. 249). Per questa ragione, il costrutto del ciclo didattico offre un quadro sia per la pianificazione che per l'analisi di un esperimento didattico. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, pp. 282-285).

Ne consegue che ogni artefatto potrà essere considerato strumento di mediazione semiotica nel caso in cui sia (o concepito per essere) usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico intenzionalmente progettato a tale scopo (Fig. 2). (Bartolini Bussi, 2010).

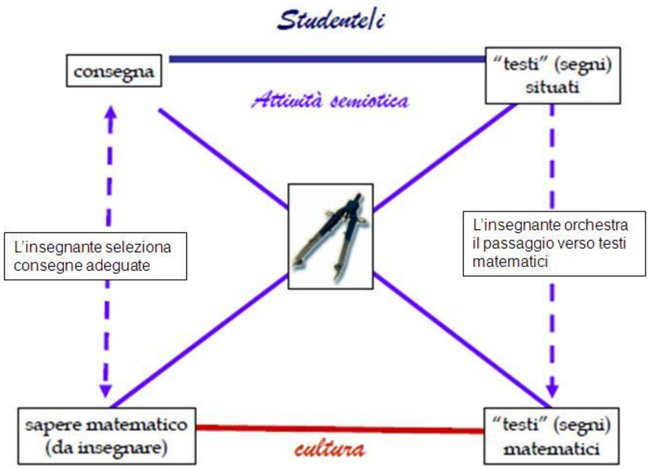


Figura 2 - Il ruolo dell'insegnante

L'uso dell'artefatto deve essere pienamente integrato nell'attività della classe, per esempio l'uso dell'artefatto deve essere 'orchestrato' come afferma Trouche (2005, p. 123).

Secondo le autrici il ruolo dell'insegnante è cruciale e la sequenza didattica deve avere certe peculiarità, coerenti con le ipotesi sopra descritte. Tale sequenza è chiamata *ciclo didattico* ed è il risultato di una lunga attività di ricerca, nell'ottica della *Ricerca per l'Innovazione* dove i risultati sperimentali e la riflessione su questi si influenzano reciprocamente (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998).

3.2.5. Il ciclo didattico

La struttura di una sequenza di insegnamento può essere evidenziata come una iterazione di cicli, dove prendono posto differenti tipologie di attività, finalizzate allo sviluppo del complesso processo semiotico descritto sopra:

- *Attività con artefatti*: gli studenti devono affrontare compiti che devono essere svolti tramite l'utilizzo di artefatti. Questo tipo di attività è generalmente utilizzato come attività di inizio di un ciclo che promuove l'uso di segni specifici in relazione all'uso di particolari artefatti o strumenti, come il lavoro a coppie, o piccolo gruppo, con l'artefatto che promuove lo scambio sociale, accompagnato da parole, schemi, gesti.

- *Produzione individuale di segni* (per esempio, disegnare, scrivere). Gli studenti sono coinvolti individualmente in diverse attività semiotiche, concernenti soprattutto produzioni scritte. Ad esempio, dopo aver utilizzato un artefatto, agli studenti è richiesto di scrivere, a casa, un resoconto individuale della loro esperienza e relative riflessioni, inclusi dubbi e domande che sono sorti. Nel caso di bambini piccoli i compiti specifici vengono definiti chiedendo di disegnare, per esempio spiegare attraverso un disegno il funzionamento di un artefatto. Si può anche chiedere loro di scrivere, sul proprio quaderno di matematica, la principale formula matematica proveniente dalla discussione collettiva (si veda sotto). Tutte queste attività sono centrate su processi semiotici, per esempio la produzione e l'elaborazione di segni, legati alle precedenti attività con gli artefatti. Sebbene l'interazione sociale durante tali attività o la discussione collettiva che le segue coinvolgano anche processi semiotici, attività di questo tipo differiscono nel fatto che richiedono un contributo personale al fine di produrre testi scritti e, conseguentemente, segni grafici, che per la loro stessa natura cominciano ad essere separati dalla contingenza dell'azione situata. A causa della loro natura e diversamente da altri segni, come i gesti, i segni scritti (in particolare le parole) sono permanenti e possono essere condivisi; possono essere utilizzati in discussioni collettive e anche divenire oggetto stesso della discussione.
- *Produzione collettiva di segni* (per esempio, narrativa, mimica, produzione collettiva di testi e disegni). Tra le altre discussioni collettive, la Discussione Matematica (Bartolini Bussi *et al.*, 1995) gioca un ruolo cruciale. Le discussioni collettive costituiscono una parte essenziale nel processo di insegnamento-apprendimento e rappresentano il cuore del processo semiotico, sul quale l'insegnamento-apprendimento è basato. In una discussione matematica l'intera classe è collettivamente impegnata in un discorso matematico, solitamente lanciato dall'insegnante, che formula esplicitamente l'argomento della discussione. Per esempio, dopo le sessioni in cui si è risolto un problema, le varie soluzioni sono discusse collettivamente, ma può anche accadere che i testi scritti dagli studenti vengano collettivamente analizzati, commentati, elaborati. Molto spesso, e talvolta esplicitamente, esse sono reali 'discussioni matematiche', nel senso che la loro caratteristica principale è che l'insegnante fa

da guida per correlare esperienza personale, significato matematico e l'uso di segni specifici (il più delle volte termini matematici). (Bartolini Bussi *et al.*, 1995). Il ruolo dell'insegnante è cruciale, infatti lo sviluppo dei segni in segni matematici, principalmente legati all'attività con artefatti, non è né semplice né spontaneo, e proprio per questa ragione sembra richieda la guida dell'insegnante. L'obiettivo principale dell'azione dell'insegnante in una discussione matematica è quello di promuovere il movimento verso segni matematici, tenendo in considerazione i contributi individuali e sfruttando i potenziali semiotici che provengono dall'utilizzo di particolari artefatti. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

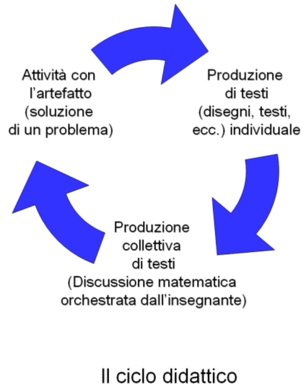


Figura 3 - Il ciclo didattico

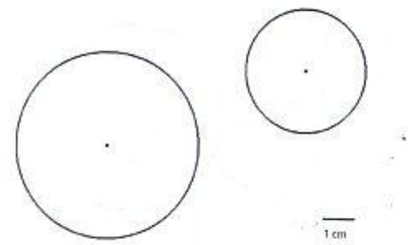
3.2.6. *Un esempio paradigmatico: il compasso*

Per esemplificare quanto descritto nei paragrafi precedenti si riporta una parte di un esperimento didattico attuato in una delle mie classi (I media, a.s. 1998-99). La sequenza didattica di insegnamento-apprendimento può essere analizzata alla luce del quadro teorico della mediazione semiotica. (Garuti, 2009; Bartolini Bussi, 2009b).

Il problema è stato proposto individualmente agli studenti di due classi di I, scuola secondaria di primo grado, dopo che avevano seguito un percorso nel quale era stata identificata e acquisita la condizione di tangenza di due cerchi. Si richiede di risolvere un problema di costruzione, di individuare un metodo e di giustificarlo.

La consegna: un problema di costruzione geometrica

Disegna un cerchio di raggio 4 cm tangente ai cerchi dati [sono disegnati due cerchi di raggi 2 cm e 3 cm, con distanza tra i centri di 7 cm].
Spiega chiaramente il metodo che usi in modo che altri possano usarlo.
Spiega con cura perché il metodo funziona.



Le risposte individuali degli studenti

Vengono selezionate dall'insegnante tre soluzioni al problema che corrispondono a diverse modalità di approccio alla soluzione adottata e alla giustificazione prodotta.

Ho aperto il compasso di 4 cm e ho cercato il punto adatto per poter combaciare i due cerchi con quello costruito dal sottoscritto. Ho unito i tre punti e ho trovato un triangolo. Il mio metodo funziona perché è stato fatto regolarmente, con tutti e tre i punti esatti. [Canio].

Lo studente procede per tentativi ed errori: apre il compasso di 4 cm e cerca di trovare 'a occhio' il centro del cerchio tangente, senza nessuna considerazione di tipo teorico.

Alcuni studenti, come Annalisa, individuano un metodo di costruzione sulla base di considerazioni teoriche: la distanza fra il centro del nuovo cerchio e gli altri due deve essere uguale alla somma dei raggi e per realizzare questo utilizzano il compasso.

Per disegnare un cerchio di raggio 4 tangente agli altri due ho proceduto in questo modo: ho unito con una retta A e C punto in C e apro il compasso della lunghezza della somma dei raggi (2+4 = 6) e traccio un archetto; punto in C e apro il compasso della somma dei raggi (4+3 = 7) e traccio un arco che si incroci con quello di prima; trovo così il punto B che sarà il centro del cerchio che devo costruire. Sono sicura che il cerchio che ho costruito è tangente perché AKB e CHB sono allineati e AK+KB = AB e CH+HB = CB. [Annalisa].

Altri allievi utilizzano un metodo ‘intermedio’ fra i precedenti, basandosi su considerazioni teoriche (somma dei raggi), ma senza essere in grado di utilizzarle praticamente nell’individuazione col compasso del centro del cerchio tangente.

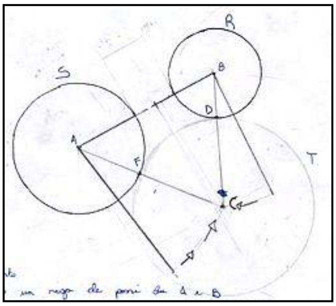
Procedimento: traccio una riga che passi da A e B; partendo da A traccio un raggio che si prolunga al di fuori della circonferenza lungo 7 cm (somma dei raggi. Partendo da B traccio un raggio che oltrepassa la circonferenza che sia di 6 cm (somma dei due raggi). Sposto i raggi fino a trovare il loro punto di incontro che poi sarà il centro del cerchio tangente. Il mio metodo funziona perché la misura dei due segmenti è uguale alla somma dei due raggi e i punti di tangenza sono allineati con i centri. [Francesco].

La soluzione di Francesco è particolarmente interessante perché, pur trovando un metodo e giustificandolo teoricamente, non individua il compasso come strumento di soluzione del problema.

La discussione di bilancio

I tre protocolli vengono presentati alla classe in discussione collettiva con lo scopo di arrivare ad una soluzione del problema condivisa.

[1] Ins. - Sono stati utilizzati metodi diversi; ad esempio Canio ha usato un metodo, vuoi parlarne?
[2] Canio - Io non ho usato un metodo, l’ho fatto a caso.
[3] Ins. - Sei sicuro?
[4] Canio - Proprio a caso no, sono andato per tentativi sempre più vicino.
[5] Simone - Ma quello non è un metodo, perché non dice esattamente cosa fare.
[6] Francesco - Anch’io ho fatto per tentativi, ho aperto il compasso della somma dei raggi e spostavo le linee finché non si toccavano. Quando si toccavano quello era il centro del cerchio tangente.
[7] Ins. - Anche Canio apriva il compasso della somma dei raggi?
[8] Canio - No, io non ci ho neanche pensato.



[9] Annalisa - Francesco va per tentativi perché muove i raggi finché non si incontrano, però è diverso da Canio.
[10] Giulio - Vorrei chiedere a Francesco se ha fatto la misura che esce dai cerchi di 4, perché 4 cm era il raggio?
[11] Francesco - Io, sapendo che il cerchio che dovevo costruire doveva essere tangente agli al-

tri due e il suo raggio era di 4 cm. Io insomma sapevo che in due cerchi tangenti la distanza è uguale alla somma dei raggi.
[12] Canio - Insomma lui in più di me sapeva che doveva venire la somma dei raggi.
[13] Francesco - Solo che non sapevo come fare per trovare con precisione quel punto d'incontro.

Nella prima parte della discussione vengono confrontati i metodi di Canio e quello di Francesco: entrambi dichiarano di aver usato un metodo per tentativi, ma l'uso di considerazioni teoriche in Francesco è esplicito e consapevole, mentre non lo è per Canio.

Emerge poi che molti ragazzi hanno disegnato per tentativi, in prima approssimazione il cerchio tangente, poi sono andati a cercare sul disegno elementi per l'individuazione di un metodo generale per la costruzione del cerchio tangente.

[14] Giulio - Io subito ho fatto come Canio, per tentativi poi, una volta disegnato ho trovato il metodo.
[15] Voci - Anch'io, anch'io…
[16] Ins - Spiegate meglio.
[17] Giulio - Ho fatto per tentativi, quando l'ho disegnato [il cerchio] ho collegato i tre centri e ho lavorato sulla lunghezza dei raggi.
[18] Ins. - Cosa vuol dire?
[19] Giulio - Ho misurato e ho visto che erano 4+2 e 4+3, allora ho capito che c'entrava la somma dei raggi.
[20] Annalisa - Io ho fatto uguale, però io ho usato il compasso.
[21] Ins. - In che senso?
[22] Annalisa - Prima l'ho disegnato a mano, poi ho aperto il compasso tra i centri e ho misurato e ho visto che era la somma dei raggi e poi mi sono accorta che il punto nuovo doveva essere distante 7 dal primo centro e 6 cm dal secondo e allora ho pensato di usare il compasso prima da una parte e poi dall'altra per trovare quel punto.

In questo passo Annalisa 'svela' una strategia tipicamente matematica: assume come risolto il problema (per tentativi) per cercare di individuare gli elementi che le permettono di trovare un metodo generale di costruzione e la loro giustificazione teorica. Di tutto questo non c'è traccia nel suo protocollo (vedi sopra) nel quale sembra procedere in modo lineare. È in questo momento che Francesco, ascoltando Annalisa, si rende conto di come poteva utilizzare il compasso.

[23] Ins. - Francesco, ti dice niente questo?

[24] Francesco - Ecco come dare la giusta inclinazione ai due segmenti, col compasso!

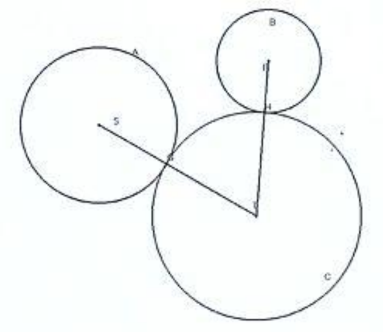
Dopo la discussione si costruisce un testo collettivo per istituzionalizzare il metodo di costruzione e le sue giustificazioni teoriche.

METODO DI COSTRUZIONE

1 - Apri il compasso di r+r1 e traccia un archetto puntando il compasso sul centro del primo cerchio.

2 - Apri il compasso di r+r2 e traccia un archetto puntando il compasso sul centro del secondo cerchio.

3 - Il punto di incontro è il centro del cerchio tangente.



GIUSTIFICAZIONE

Il metodo funziona perché il centro del cerchio tangente ha una distanza dagli altri due centri uguale alla somma dei raggi

ENUNCIATO

Se il centro del cerchio disegnato è distante dal centro del primo cerchio come la somma dei loro raggi e dal centro del secondo cerchio come la somma dei loro raggi, allora il cerchio disegnato è tangente agli altri due.

L'interpretazione alla luce della mediazione semiotica

Il costrutto teorico della *mediazione semiotica* consente di interpretare con molta chiarezza questo spezzone di attività didattica che ha come scopo la risoluzione di un problema di costruzione e la sua giustificazione teorica.

Nello schema seguente (Fig. 4) la parte superiore (allievo) esprime la relazione fra la consegna e il testo prodotto dagli allievi, che, come si vede dai protocolli, è molto spesso collegato alle operazioni svolte (testi situati), mentre la parte inferiore (cultura) esprime la relazione fra il sapere matematico da insegnare e la giustificazione teorica già prodotta dagli allievi o producibile sotto la guida dell'insegnante (testi matematici). I due sistemi paralleli sono entrambi correlati ad un artefatto, in questo caso il compasso, ma in modo diverso: la relazione fra sapere e artefatto è espressa da segni culturalmente determinati, mentre la relazione fra consegna e artefatto è espressa da segni contingenti legati alla soluzione di un compito particolare (ad esempio Canio usa il compasso, ma non per trovare il centro del cerchio tangente).

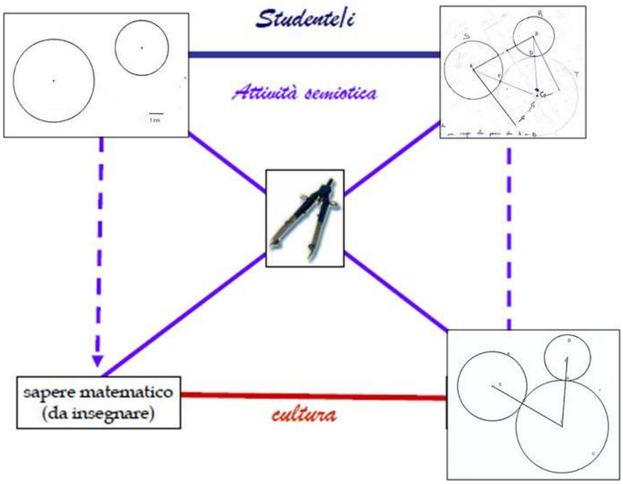


Figura 4 – Un esempio di mediazione semiotica

Nella parte sinistra dello schema abbiamo la relazione fra il sapere matematico e il compito proposto dall'insegnante (costruzione di un cerchio tangente a due cerchi dati), mentre nella parte sinistra il ruolo dell'insegnante è quello di guidare il passaggio dalle produzioni individuali degli allievi (testi situati) verso il sapere matematico in gioco (condizioni di tangenza di due cerchi). Nell'esempio descritto l'insegnante agisce a livello cognitivo predisponendo un'opportuna consegna e a livello metacognitivo guidando l'evoluzione dei segni (testi) prodotti dagli allievi verso i significati matematici legati all'uso dello strumento. In altre parole l'insegnante usa l'artefatto (il compasso) come strumento di mediazione semiotica, infatti attraverso l'uso intenzionale del compasso come strumento per la soluzione del problema posto l'insegnante media:

- parti di conoscenza matematica (come disegnare);
- alcune attitudini (la ricerca di un metodo);
- il senso della cultura matematica (giustificare all'interno di una teoria di riferimento).

L'azione di guida è di tipo semiotico perché è sui segni e sulla loro evoluzione che agisce l'insegnante. L'azione dell'insegnante si esplica all'interno del *ciclo didattico* (Fig. 2) che prevede attività con gli artefatti, produzione individuale di segni e produzione collettiva (discussione matematica) di segni. Il caso di Francesco è emblematico di questo percorso: è solo in discussione collettiva che, individuando il compasso come strumento di soluzione del problema, è in grado di passare da un testo fortemente situato (*muovo finché i raggi non si toccano*) a un testo matematico giustificato teoricamente.

3.3. Approccio al sapere teorico: congetturare e dimostrare

Da diversi anni l'attenzione ad attività fondanti per la matematica come la produzione di congetture e la costruzione di dimostrazioni è presente nella ricerca educativa della matematica. Tre sono i testi di riferimento attraverso i quali inquadrare l'analisi epistemologica alla base della ricerca nel Progetto MMLab-ER.

Il primo è il volume *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*, a cura di P. Boero (Boero, 2007), che raccoglie i contributi dei principali ricercatori nazionali e internazionali su questo tema. Nella prefazione G. Hanna sostiene che:

> With today's stress on making mathematics meaningful teachers are being encouraged to focus on the explanation of mathematical concepts and students are being asked to justify their findings and assertions. […] Teaching students to both recognize and produce valid mathematical arguments is certainly a challenge. We know all too well that many students have difficulty following any sort of logical argument, much less a mathematical proof. But we cannot avoid this challenge. We need to find ways, through research and classroom experience to help students master the skills and gain the understanding they need. Our failure to do so will deny us a valuable teaching tool and deny our students access to a crucial elements of mathematics. (Hanna, 2007, p. 14).

Nel volume sono presenti articoli che mettono in luce, anche su posizioni diverse, la relazione fra argomentazione e dimostrazione (Duval, 2007; Douek, 2007) e numerosi articoli dedicati agli aspetti didattici dell'approccio alla dimostrazione.

Il secondo rifermento riguarda il lungo ed esauriente articolo di M.A. Mariotti *Proof and proving in matematics education* (Mariotti, 2006) nel volume dedicato alla ricerca in didattica della matematica degli ultimi trent'anni dal gruppo PME[18]. In questo articolo Mariotti descrive lo stato

[18] International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME): *http://igpme.org/*

dell'arte della ricerca educativa su questo spinoso problema e conclude con queste parole:

> As mentioned at the beginning a general consensus has been achieved on the fact that development of a sense of proof constitutes an important objective of mathematical education and there seems to be a general trend towards including proof in the curriculum. This objective is strictly linked to other objectives concerning the development of other mathematical competencies. Besides the importance of proof and the need to include it in the mathematics curriculum, current research has shown the complexity of the idea of proof and the difficulties that teachers and students face when proof becomes part of classroom mathematical activities. (Mariotti, 2006, pp. 197-198).

Il terzo elemento è rappresentato dall'articolo di Bartolini Bussi (2009a), *Experimental mathematics and the teaching and learning of proof*, nel quale l'autrice descrive il ruolo dell'esplorazione di artefatti (macchine matematiche) nella produzione di congetture:

> There are good reasons to believe that conjecturing through exploration before proving might be very useful. Yet, when conjecture production is too fast, it might offer no element to be used in the proving process. Hence it is useful to look for strategies that slow down the conjecture production and encourage effective exploration of the problem. The time spent in conjecture production is not wasted and may be recovered in the proof construction. (Bartolini Bussi, 2009a).

3.3.1. L'unità cognitiva fra congettura e dimostrazione

Gli studi sul legame fra congettura e dimostrazione in campo matematico sono stati (e sono) oggetto di studio all'interno del Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica diretto dal prof. P. Boero (Università di Genova) a partire dalla fine degli anni '90. In seguito all'analisi di molteplici esperimenti didattici si era introdotto un costrutto teorico specifico: *l'unità cognitiva* tra la produzione di una congettura e la costruzione eventuale della sua dimostrazione. Questo processo veniva descritto nel modo seguente:

> Durante la produzione della congettura, l'alunno progressivamente perviene al suo enunciato attraverso una intensa attività argomentativa che si intreccia funzionalmente alla giustificazione della plausibilità delle scelte compiute. Nel-

la successiva fase di dimostrazione dell'enunciato l'alunno si collega a tale processo in modo coerente organizzando in catena logica alcune delle giustificazioni (argomenti) prodotte durante la produzione dell'enunciato. (Garuti *et al.*, 1996; Garuti, 2003; Boero *et al.*, 2007).

Nonostante le innegabili differenze tra argomentazione e dimostrazione (Duval, 1991) si volevano sottolineare alcuni aspetti di continuità riguardanti in particolare la generazione, durante la produzione della congettura di elementi che venivano poi utilizzati nella costruzione della dimostrazione. Tali elementi riguardavano: il tipo di esplorazione condotta, gli argomenti a sostegno della congettura e le metafore utilizzate. È interessante il parallelo indicato da Balacheff nello studio della dimostrazione: *Argumentation is to a conjecture what mathematical proof is to a theorem* (Balacheff, 1999).

La principale forza di questa nozione è quella di fornire un modo per sfuggire alla rigida dicotomia che contrappone l'argomentazione alla dimostrazione. Non si nega la possibile distanza tra argomentazione e dimostrazione, ma nemmeno si assume in modo definitivo che questo rappresenti un ostacolo; in questa prospettiva la distinzione essenzialmente irrecuperabile tra argomentazione e dimostrazione viene sostituita dal mettere in luce le analogie, senza dimenticare le differenze. Questa posizione ha aperto la strada a un nuovo approccio in cui la relazione complessa tra argomentazione e dimostrazione viene considerata un oggetto di ricerca in sé e la nozione di *unità cognitiva* può essere utilizzata come un mezzo per strutturare la ricerca.

3.3.2. Dimostrazione e teoria

Al fine di chiarire lo status della dimostrazione è stato inserito un ulteriore elemento. La dimostrazione viene tradizionalmente considerata come un qualcosa a sé stante, come se fosse possibile isolare una dimostrazione sia dall'enunciato a cui essa fornisce supporto che dal quadro teorico all'interno del quale tale supporto acquista significato. In effetti quando è in gioco una dimostrazione, tutti questi elementi, anche se non sempre esplicitati, sono coinvolti contemporaneamente, e non è possibile afferrare il senso di una *dimostrazione matematica* senza collegarla agli altri due elementi: un *enunciato* e una particolare *teoria*. (Mariotti, 2009; Mariotti *et al.,* 1997).

Per un matematico, l'esistenza e l'attendibilità di un quadro teorico all'interno del quale si situa la dimostrazione di una proposizione è fuori discussione ed è tacitamente assunta, anche quando tale quadro non è reso esplicito. Al contrario, per chi non è esperto l'idea di una verità relativa a una teoria può essere difficile da afferrare; in ogni caso, questo modo di ragionare non può essere dato per scontato e la sua complessità non può essere ignorata. In particolare, la confusione tra una verità assoluta e una verità relativa a una teoria, che corrisponde a confondere le due principali funzioni della dimostrazione (spiegazione e validazione), può avere serie conseguenze.

Pertanto, allo scopo di ricordare il contributo dato da ognuna delle componenti coinvolte nel produrre un teorema, è stato introdotta la seguente caratterizzazione nella quale una dimostrazione è concepita come parte di un sistema di elementi:

> Se vogliamo parlare di dimostrazione in senso matematico è necessaria l'esistenza di una teoria di riferimento sotto forma di un sistema di principi condivisi e di regole di deduzione. I principi e le regole di deduzione sono così strettamente collegati fra loro che ciò che caratterizza un teorema matematico è il sistema costituito da enunciato, dimostrazione e teoria. (Mariotti, 2009, p. 630; Mariotti *et al.*, p. 182).

La definizione di teorema matematico introdotta è un utile strumento per evidenziare una corrispondenza tra il sistema di riferimento di una argomentazione, cioè il sistema di concezioni da cui emerge una congettura all'interno del quale essa viene formulata e supportata da argomentazioni più o meno esplicite, e la teoria, cioè il sistema di teoremi e di definizioni disponibili all'interno del quale viene prodotta la dimostrazione. Di conseguenza è riconoscibile un'unità cognitiva quando esiste una congruenza tra il sistema di concezioni su cui si costruiscono sia la congettura che le argomentazioni che la sostengono e la teoria all'interno della quale si effettua la dimostrazione.

Tuttavia, anche se è spesso riconoscibile la continuità nel contenuto, succede, a volte, che possa essere difficile da raggiungere la costruzione di una catena deduttiva che colleghi in modo corretto gli elementi teorici coinvolti. Infatti a differenza di quanto succede nel caso del contenuto, la continuità fra la struttura dell'argomentazione e quella della dimostrazione può risultare problematica e condurre a errori e inconsistenze. La tesi di dottorato di B. Pedemonte (2002) ha analizzato questi aspetti che hanno portato al distinguere il costrutto dell'unità cognitiva in *unità cognitiva referenziale* (di contenuto) e *unità cognitiva strutturale* (legata alla struttura della dimostrazione ad esempio abduzione e deduzione).

3.3.3. Il ruolo dell'esplorazione: un esempio con il parabolografo di Cavalieri

Gli studi precedentemente descritti possono avere importanti conseguenze nell'insegnamento-apprendimento della dimostrazione: possono spiegare perché l'insegnamento 'tradizionale' della dimostrazione, che consiste nel ripetere dimostrazioni lette dal libro, non ha successo per la maggior parte degli studenti; possono aiutare a scegliere problemi adatti che favoriscano la produzione di congetture e di argomentazioni a supporto; possono aiutarci a capire perché, in alcuni casi, dimostrare un enunciato rimane un compito difficile nonostante il processo di produzione di congetture sotteso.

In ogni caso è risultato evidente da numerosi esperimenti didattici che le situazioni nelle quali è possibile sviluppare processi esplorativi (in genere problemi aperti) sono quelle che favoriscono la produzione di congetture e, sotto la guida dell'insegnante, è possibile arrivare alla costruzione della dimostrazione, anche con alunni in giovane età. (Bartolini Bussi, 2009e).

Le macchine matematiche, per loro natura, sono un ambiente particolarmente favorevole perché si prestano ad essere esplorate anche fisicamente. (Bartolini Bussi, 2009a e 2009c).

> The exploration of physical, tangible artifacts fosters the production of statements within the frame of elementary geometry (Bartolini Bussi, 2009c, p. 160).

In questo articolo l'autrice propone esempi diversi di artefatti, tra i quali il parabolografo di Cavalieri (Fig. 5), una macchina costruita da Cavalieri (1598-1647) per disegnare un arco di parabola.

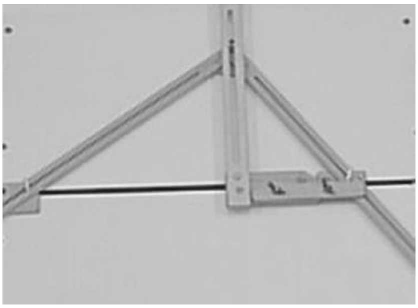


Figura 5 - Il parabolografo di Cavalieri

L'esplorazione dello strumento è guidata da uno schema esplorativo (ripreso con modifiche nel progetto MMLab-ER):

1) Quante aste ci sono nel sistema articolato? (Fig. 6)
2) Quali figure formano le aste?
3) Muovi il sistema articolato. Cosa succede ai vertici delle figure durante il movimento?
4) Quanti gradi di libertà hanno i vertici?
5) Quali parti del sistema non cambiano durante il movimento?
6) Metti la mina in B e traccia un arco muovendo il sistema. Riconosci che tipo di curva è? Perché?
7) Chiama x il segmento variabile AE; y il segmento EB, p il segmento costante EK. Scrivi la relazione tra x, y e p del al triangolo rettangolo AKB
8) Riconosci la curva rappresentata dall'equazione ottenuta?

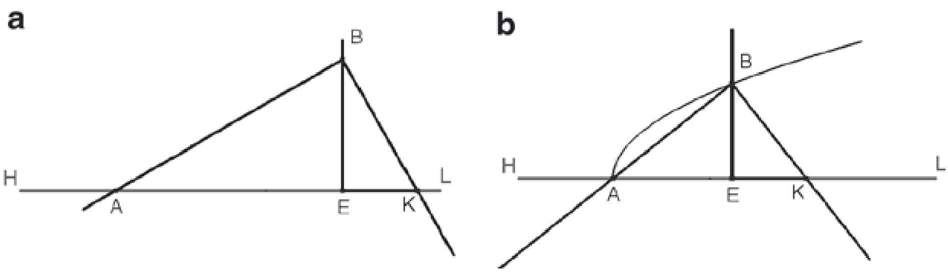


Figura 6 - Rappresentazione schematica del Cavalieri

Una prima congettura può essere prodotta come risposta alla domanda 6, nella quale è richiesta anche la giustificazione. Non è richiesta la dimostrazione formale della loro congettura, l'obiettivo è quello di avere elementi argomentativi per giustificare la propria congettura. Non è semplice collegare il funzionamento di questo artefatto con la definizione nota di parabola. Le domande 7 e 8 rappresentano un cambiamento di riferimento teorico, non più la geometria euclidea, ma quella analitica (si suppone che studenti della secondaria di secondo grado conoscano l'equazione della parabola).

È interessante osservare che il movimento della macchina, mentre i triangoli ABK e BEK rimangono rettangoli, consente di realizzare infiniti esperimenti.

In questo caso l'artefatto ha diverse funzioni:

- offre la possibilità di una esplorazione dinamica con produzione di congetture in un contesto storicamente significativo;
- offre, durante la costruzione della dimostrazione, un supporto teorico relativo alla geometria elementare;
- offe un significato geometrico al parametro p presente nell'equazione della conica. (Bartolini Bussi, 2009c).

In questo esempio si vede come l'esplorazione dell'artefatto, così come l'esplorazione (anche mentale) di situazioni problematiche aperte, favorisce (può favorire) la produzione di congetture e la costruzione della dimostrazione. (Martignone, 2006).

Parte Seconda

IL PROGETTO REGIONALE SCIENZE E TECNOLOGIE

AZIONE 1

LABORATORI DELLE MACCHINE MATEMATICHE IN EMILIA-ROMAGNA - MMLAB-ER

Capitolo quarto
Gli aspetti istituzionali del progetto MMLab-ER

4.1. La genesi del progetto

Il Progetto MMLab-ER[19] nasce all'interno di un progetto regionale più ampio, Scienze e Tecnologie, che viene finanziato dalla Regione Emilia-Romagna (Assessorato regionale alla scuola, formazione professionale, università, lavoro e pari opportunità). La sensibilità dell'allora Assessore regionale Paola Manzini a questi temi si incontra con la disponibilità e il lavoro di ricerca del coordinatore del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena, Maria Giuseppina Bartolini Bussi (Università di Modena e Reggio Emilia).

Il momento, autunno 2007, è importante in quanto solo l'anno precedente (4 agosto 2006) è stata istituita una Commissione per lo sviluppo della Scienza e della Tecnica presieduta dall'on. Luigi Berlinguer. Il gruppo di lavoro interministeriale ha i seguenti compiti:

- definire le azioni e le strutture per la diffusione della cultura scientifica e tecnologica nel Paese;
- suggerire le linee di una politica di sviluppo che definisca i compiti dei soggetti pubblici e privati;
- proporre e definire progetti e azioni di sistema rivolti alla scuola, ai cittadini adulti, alla società nel suo complesso;
- proporre, in particolare, azioni e servizi per la formazione dei docenti e per il sostegno alla loro attività professionale;
- suggerire soluzioni curricolari in vista di un miglioramento degli ordinamenti formativi ai temi dell'educazione scientifica e tecnologica.

È su questa idea che l'assessore regionale si muove e nasce l'idea di un progetto fortemente radicato sul territorio e che abbia al centro l'educazione scientifica dei giovani.

Nella tarda primavera del 2008 gli attori istituzionali (l'Assessorato regionale alla scuola, formazione professionale, università, lavoro e pari

[19] Il resoconto finale del progetto si può trovare nel volume Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna - Azione 1, F. Martignone (2010) (a cura di). Tecnodid, Napoli, 17-208, disponile anche sul sito: *http://www.didatticaer.it/progetti_regionali/progetto_scienze_tecnologia.aspx*

Opportunità, la Direzione Generale dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna e l'Agenzia Nazionale per lo sviluppo dell'Autonomia Scolastica (Nucleo Regionale ex-IRRE E-R) condividono un Progetto biennale regionale di promozione delle competenze scientifiche e matematiche, denominato Progetto Scienze e Tecnologie, nel quadro del progetto nazionale per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica, affidando ufficialmente il coordinamento scientifico dell'Azione 1 (Laboratorio delle Macchine Matematiche) all'Università di Modena e Reggio Emilia. (In appendice il progetto e la convenzione con l'Università).

4.2. Le istituzioni coinvolte

Il Progetto, che coniuga diverse esigenze e diversi tipi di azione con la partecipazione di vari attori istituzionali (Università, Regione, Scuola, Centri per insegnanti), ha una notevole complessità, che richiede la condivisione degli obiettivi e dei metodi di lavoro non solo con i destinatari finali della formazione (insegnanti), ma anche con i diversi attori e comporta la difficoltà di coordinare i tempi di funzionamento delle istituzioni coinvolte con i tempi della scuola.

Il progetto regionale nella sua prima annualità (2008-2009) vede coinvolte direttamente due province, Rimini e Piacenza, alle quali, nella seconda annualità (2009-2010) si aggiungono Modena, Bologna e Ravenna (sede di Faenza) (Fig 1).

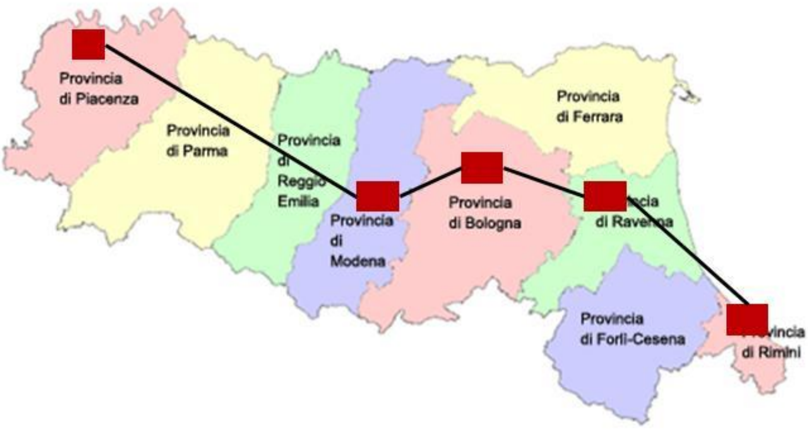


Figura 1 - Le province coinvolte nel progetto MMLab-ER

I due attori istituzionali che finanziano il progetto sono l'Assessorato regionale scuola, formazione professionale, università, lavoro, pari opportunità e l'Ufficio Scolastico Regionale. L'ANSAS (ex-IRRE Emilia-Romagna) ha il compito di tenere i collegamenti con i docenti coinvolti nel progetto; in ogni provincia, si individuano come referenti privilegiati i Centri Territoriali per gli insegnanti (Centri di documentazione o centri pedagogici che dipendono dalla Provincia o dai Comuni).

4.3. La realizzazione del progetto

4.3.1. Il primo anno (2008-2009)

Il 21 luglio 2008, con la firma dell'intesa tra gli attori istituzionali si avvia la fase operativa del Progetto. Per l'Azione 1 è nominato il Comitato tecnico-scientifico, costituito da rappresentanti della Regione Emilia-Romagna, dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna, dell'ANSAS - ex IRRE, integrato con i rappresentanti delle istituzioni partecipanti (Bartolini Bussi, Maschietto, Garuti). Il Gruppo di Consultazione è costituito dai membri del Comitato tecnico-scientifico e da rappresentanti dei Centri di documentazione per insegnanti. Successivamente è formato un Gruppo di lavoro regionale ampliato con i formatori e i tutor delle sperimentazioni operanti sulle diverse sedi. I formatori sono individuati dal Comitato tecnico-scientifico su indicazione dell'Università di Modena e Reggio Emilia. I tutor per la sperimentazione sono selezionati dall'Università in accordo con i Centri, per favorire il radicamento del Progetto sui territori provinciali e garantire una continuità tra il Progetto e le successive attività dei Centri sul laboratorio di matematica. Inoltre, rappresentano il nucleo delle risorse umane che possono contribuire alla crescita dei laboratori come aule didattiche decentrate.

Nell'intesa sono anche individuate le due province (Piacenza e Rimini) presso cui avviare il Progetto nel primo anno e i relativi Centri di Documentazione (Centro di Documentazione Educativa di Piacenza[20]; Centro Pedagogico di Rimini[21]).

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena apre una pagina nel proprio sito, dedicata al Progetto regionale[22]. Tale pagina con-

[20] *http://www.cde-pc.it*

[21] *http://www.centropedagogicorimini.it/*

[22] *http://www.mmlab.unimore.it/*

tiene i documenti base del Progetto e le informazioni sulle attività nelle singole sedi. I Centri di Documentazione nei loro siti aprono sezioni in cui inserire documentazioni aggiuntive sulle attività del loro territorio.

Le prime due aule decentrate sono allestite tra gennaio e febbraio 2009, con una dotazione di pantografi, curvigrafi e pascaline in diverse copie per garantire la possibilità ai docenti prima e agli studenti poi di lavorare in piccolo gruppo.

Nello stesso tempo vengono individuati i docenti che parteciperanno alla formazione e che si impegnano ad effettuare sperimentazioni nelle loro classi. Vengono anche nominati i formatori e i tutor delle sperimentazioni per le due province.

4.3.2. Il secondo anno (2009-2010)

All'inizio dell'anno scolastico 2009-2010 l'attività è estesa alle province di Modena, Bologna e Ravenna. A Modena, come sede è stato scelto il Laboratorio delle Macchine Matematiche, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università, in collaborazione con il Centro di Documentazione MEMO[23], a partire da novembre 2009. Altre due sedi sono allestite, per la provincia di Bologna, presso la scuola media statale "G. Guinizelli" (con il coordinamento del Centro Minguzzi[24]) e per la provincia di Ravenna presso la Palestra della Scienza di Faenza[25] (con il coordinamento del Centro Servizi e Consulenza alle autonomie scolastiche CSC-Ravenna[26] di Lugo). Nelle tre sedi, la promozione del Progetto e dei laboratorio avviene con modalità diverse. Il Centro Minguzzi inaugura il laboratorio di Bologna in un evento a fine novembre. La Palestra della Scienza presenta il Progetto e i primi risultati della formazione nel mese di marzo in occasione della mostra "La Bottega Matematica", nell'ambito della quale viene organizzata una tavola rotonda sul tema del laboratorio di matematica. Sempre nel mese di marzo, l'Ufficio Scolastico Provinciale di Modena organizza un seminario sul tema "Matematica e scienze nella provincia di Modena" per illustrare alle scuole i primi risultati del Progetto.

I Centri di Piacenza e Rimini rilanciano l'attività, avviando alcune iniziative pubbliche e momenti di incontro a partire da settembre 2009. In

[23] *http://istruzione.comune.modena.it/memo/*

[24] *http://www.minguzzi.provincia.bologna.it/Engine/RAServePG.php*

[25] *http://palestradellascienzafaenza.racine.ra.it/*

[26] *http://www.innovazioneonline.it/*

varie iniziative si avviano scambi di esperienze tra le diverse sedi, con inviti incrociati di formatori e insegnanti esperti. Nel corso dell'anno, proseguono le sperimentazioni coordinate dai Centri di Piacenza e Rimini, con il supporto dei tutor. Alla chiusura dell'anno scolastico 2009-10, ciascuna sede inserisce un'esperienza didattica sul sito Gold[27].

Dopo la formazione, anche le nuove sedi (Modena, Bologna, Ravenna) avviano numerose sperimentazioni (febbraio-maggio 2010). Tutte le sedi raccolgono documentazioni ricche e variate comprendenti: progetti delle sperimentazioni svolte; diari di bordo; foto delle attività (in classe e nei laboratori); video che documentano sperimentazioni; video che raccontano l'esperienza del Progetto; schede consegnate agli studenti; prove di verifica relative alle diverse attività svolte con le macchine matematiche; protocolli di studenti (schede compilate, relazioni); presentazioni Power Point prodotte da insegnanti e studenti sulle loro esperienze; relazioni finali conclusive degli insegnanti; relazioni finali degli insegnanti destinate al report finale.

Michela Maschietto, coordinatrice del progetto insieme a Bartolini Bussi, progetta e attiva una piattaforma Moodle per le sedi di Modena e di Bologna, in via sperimentale. La piattaforma si presenta come un dispositivo di accompagnamento e sostegno durante la formazione e la sperimentazione. Essa costituisce uno spazio di lavoro tra formatori, tutor e insegnanti che partecipano al Progetto. Sulla piattaforma si realizza gran parte del lavoro dei tutor nella fase di sperimentazione. Oltre ad essere un utile strumento nel processo di formazione, sperimentazione, documentazione, la piattaforma rappresenta anche uno strumento di ricerca poiché con la sua 'memoria' consente di ricostruire a posteriori il processo di scambio e condivisione del materiale sul laboratorio di matematica e sulle macchine matematiche.

4.4. L'articolazione territoriale del progetto

Il progetto ha consentito la costituzione di una rete regionale di un centinaio di membri comprendente ricercatori dell'Università, formatori, tutor, insegnanti. In particolare i tutor e gli insegnanti costituiscono un primo nucleo di docenti collegato al territorio per la continuazione 'autonoma' del Progetto. La rete che ha realizzato il Progetto dal punto di vista scientifico e didattico è rappresentata nella Fig. 2.

[27] *http://gold.indire.it/gold2/*

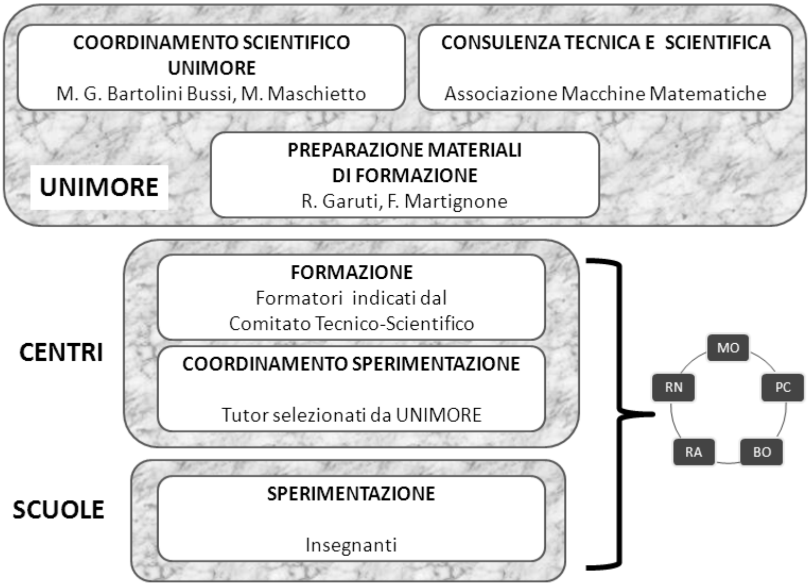


Figura 2 - La rete scientifico-didattica del progetto MMLab-ER

Al Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena si sono aggiunte quattro aule didattiche decentrate, presso il CDE di Piacenza, il Centro Pedagogico di Rimini, il Centro Minguzzi di Bologna e la Palestra della Scienza di Faenza (Ravenna), che opera in coordinamento con il CSC-Ravenna di Lugo. Le aule sono collocate in locali di medie dimensioni che consentono attività laboratoriali a gruppi di 25-30 partecipanti (studenti o insegnanti in corsi di formazione). Gli arredi, forniti dai Centri, sono molto semplici: armadi o scaffalature per ospitare le macchine matematiche in dotazione, tavoli e sedie per l'attività; una postazione computer per l'utilizzo di simulazioni o la connessione in rete. Le macchine matematiche sono utilizzate nelle sedi o sono prestate alle scuole per attività in classe. Le aule sono utilizzate anche come luoghi di incontro e di confronto sul tema del laboratorio di matematica. Grazie alla formazione, le varie aule non sono solo locali attrezzati, ma sono soprattutto luoghi ricchi di risorse umane, gli insegnanti e i tutor. In quest'ottica, i Centri, con il nucleo di docenti radicati sul territorio, garantiscono il collegamento tra quanto avviato e le altre risorse e la continuità del Progetto nel tempo.

4.5. I risultati in sintesi

Nei capitoli successivi si entrerà maggiormente nel merito della struttura del progetto e dei risultati e delle difficoltà incontrate; qui si vogliono riportare in sintesi alcuni dei principali risultati del progetto MMLab-ER.

- Si sono predisposte 4 aule decentrate, oltre a quella funzionante presso il Dipartimento di Matematica di Modena, con una dotazione consistente di macchine matematiche per almeno tre tipi di percorsi didattici: aritmetica (pascalina), trasformazioni geometriche nel piano (pantografi), coniche (curvigrafi).
- In ogni provincia si è formato un gruppo di docenti di scuole di grado e indirizzo diversi, prevalentemente di scuola secondaria, che hanno seguito la formazione ed effettuato sperimentazioni in classe. Il gruppo di docenti dovrebbe costituire un punto di riferimento per i docenti del territorio. In alcune province si sono attivati corsi di formazione sul laboratorio di matematica con le macchine tenuti dai docenti formati.
- Nei siti dei centri territoriali sono a disposizione di tutti i materiali della formazione e la documentazione relativa alle sperimentazioni effettuate.
- È stato pubblicato nel dicembre 2010 il report del progetto, che sarà distribuito in tutte le scuole della regione: *Scienze e tecnologie in Emilia-Romagna. Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna* (2010)[28].
- Sul sito del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena sono presenti tutti i materiali della formazione e i report delle sperimentazioni[29].
- Dal punto di vista della ricerca sono stati pubblicati numerosi articoli sia a carattere nazionale sia internazionale su aspetti particolari del progetto.
    a) Martignone, F. (2010). La didattica laboratoriale: il progetto MMlab-ER. In Benini & Orlandoni (a cura di), *Matematica: dalle Indicazioni alla pratica didattica,* Tecnodid, 62-66.
    b) Martignone, F. & Bartolini Bussi M.G. (2010). Il Laboratorio delle Macchine Matematiche: dalla tradizione a un

[28]*http://www.mmlab.unimore.it/online/Home/ProgettoRegionaleEmiliaRomagna/RisultatidelProgetto/LibroProgettoregionale.html*

[29] *http://www.mmlab.unimore.it/on-line/Home/ProgettoRegionaleEmiliaRomagna.html*

progetto regionale di formazione degli insegnanti della scuola secondaria, *New Trends. In Science and Technology Education*: selected papers, (a cura di) L. Menabue e G. Santoro, CLUEB Bologna, vol. II, 129-147.

c) Martignone, F. (2009). Laboratori con le macchine Matematiche. In Robutti & Mosca (a cura di) *Atti del IV Convegno nazionale di didattica della Fisica e della Matematica Il laboratorio di Fisica e Matematica*, Kim William Books, Torino, 385-395.
d) Garuti, R. (2009). Il progetto MMLAB-ER. Un esempio con la pascalina (Zero+1). In Robutti & Mosca (a cura di) *Atti del IV Convegno nazionale di didattica della Fisica e della Matematica Il laboratorio di Fisica e Matematica*, Kim William Books, Torino, 355-361.
e) Bartolini Bussi M.G., Garuti, R., Martignone, F., Maschietto M. (2011). Tasks for teachers in the MMLab-ER Project. *Research Forum PME35*, Ankara (accettato).
f) Garuti, R. (2011). A task on Scheiner pantograph: a case study. Presentato al *Congresso internazionale PME35*, Ankara.
g) Martignone, F. (2011). Tasks for teachers in mathematics laboratory activities: a case study. *Presentato al Congresso internazionale PME35*, Ankara.
h) Martignone, F. (2011). Laboratory activities in teacher training. Proceedings CERME7[30].
i) Concu, M. (2011). Pantografi per alcune trasformazioni geometriche del piano: simmetria assiale, omotetia e stiramento. In *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* (accettato per la pubblicazione).

[30] *http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/CERME7-WG17.pdf*

Capitolo quinto
La struttura del progetto MMLab-ER

5.1. Obiettivi, modalità e tempi

Il progetto MMLab-ER nel suo complesso ha i seguenti obiettivi:

- la messa a punto di un modello operativo di diffusione su scala regionale di una metodologia di attività di laboratorio di matematica, coerente con le raccomandazioni del Rapporto Rocard e del Rapporto Berlinguer;
- la sperimentazione parziale (nel primo anno) in due province (Piacenza e Rimini);
- la sperimentazione (nel secondo anno) in altre tre province (Modena, Bologna e Ravenna);
- il monitoraggio della sperimentazione.

Per raggiungere questi obiettivi il coinvolgimento delle istituzioni territoriali (Centri territoriali per gli insegnanti e istituzioni scolastiche) è stato fondamentale. Alle scuole delle province interessate è stato inviato dall'ANSAS (ex-IRRE Emilia-Romagna) il bando di presentazione del progetto e l'invito ai docenti a partecipare alla selezione regionale per accedere alla formazione. Contemporaneamente si sono presi i contatti con i responsabili dei Centri Territoriali provinciali per l'individuazione delle sedi nelle quali istituire le aule decentrate. Solo a Modena, la sede del Laboratorio delle Macchine Matematiche, operante presso il Dipartimento di matematica dell'Università, ha funzionato come aula decentrata per questo progetto. In tutte le altre quattro province è stato necessario individuare una sede e soprattutto allestirla con la dotazione di macchine matematiche e arredi per le attività di laboratorio. Nello stesso tempo si individuavano i docenti (prevalentemente di scuola secondaria di primo e secondo grado), i formatori e i tutor della sperimentazione. Nella presentazione del progetto infatti si dice che:

I beneficiari delle azioni che si intende promuovere sono, in primo luogo, gli insegnanti delle province individuate, attraverso:
- percorsi di formazione sull'idea di laboratorio,
- offerta locale di materiali e strumenti per la didattica,

e, in secondo luogo, gli studenti delle scuole secondarie di 1° e 2° grado delle province interessate.

Le azioni operative per il raggiungimento degli obiettivi sono state di diverso tipo:

- Collaborazione con i Centri territoriali e individuazione dei compiti. I Centri territoriali, oltre a seguire la formazione, avevano come compito istituzionale quello della documentazione, trattandosi in prevalenza di centri di documentazione.
- Individuazione dei formatori tra i collaboratori del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena, in grado di gestire le aule didattiche e di garantire la tenuta scientifica del progetto.
- Individuazione, tra i docenti coinvolti, di tutor della sperimentazione che costituissero un punto di riferimento territoriale sia durante la formazione sia nella fase della sperimentazione. In prospettiva questi docenti avrebbero anche avuto il compito di far 'vivere' le aule decentrate oltre la fine del progetto.
- Preparazione dei materiali per la formazione e degli strumenti per la sperimentazione. I materiali comuni a tutte le province garantivano un filo conduttore comune nelle diverse province, con la possibilità all'interno dello stesso quadro teorico di riferimento di curvature legate alle specificità territoriali. Per fare un esempio, a Ravenna (Faenza) è stata importante la sinergia con la Bottega della Scienza.
- Formazione dei docenti (sette incontri di quattro ore ciascuno) sulle attività di laboratorio con le macchine matematiche.
- Sperimentazioni nelle classi dei docenti coinvolti;
- Documentazione delle attività di formazione e sperimentazione.
- Iniziative di ricerca e attività di documentazione a livello regionale.
- Diffusione dei risultati del progetto in ambito nazionale e internazionale.

Per quanto riguarda i tempi si può dire che il primo anno i tempi del progetto sono stati in conflitto con i tempi della scuola, in quanto la formazione è cominciata nella primavera del 2009 e quindi i tempi per la sperimentazione sono stati piuttosto risicati. Nel secondo anno (2009-2010) la formazione ha avuto inizio nel primo quadrimestre, quindi è stato possibile avere tempi più distesi per le sperimentazioni e la raccolta della documentazione. In Tab. 1 la struttura temporale del progetto:

A.s. 2008-2009	*Province*	*Attività*
22-7-2008 delibera della Regione Emilia-Romagna		Inizio delle attività
Settembre-dicembre 2009	Rimini, Piacenza	Allestimento aule didattiche; individuazione dei docenti
Marzo - aprile 2009	Rimini, Piacenza	Formazione docenti
Maggio - giugno 2009	Rimini, Piacenza	Sperimentazioni in classe
A.s. 2009-2010	*Province*	*Attività*
Settembre - ottobre 2009	Ravenna, Bologna	Allestimento aule didattiche
Novembre 2009 - marzo 2010	Modena, Ravenna, Bologna	Formazione docenti
Marzo - giugno 2010	Piacenza, Rimini, Modena, Ravenna, Bologna	Sperimentazioni nelle classi
Giugno 2010	Piacenza, Rimini, Modena, Ravenna, Bologna	Raccolta dei materiali delle sperimentazioni
Luglio - agosto 2010	Unimore	Raccolta dei materiali e stesura del rapporto finale
2 dicembre 2010 13 dicembre 2010	RER-Unimore-USR-ANSAS (ex IRRE-ER)	Presentazione dei risultati del progetto

Tab. 1 - La struttura temporale del progetto

5.2. Le aule didattiche decentrate e la dotazione delle macchine matematiche

Le aule didattiche decentrate (Fig. 1) sono state istituite o nei Centri Territoriali o in scuole collegate ai centri, a parte Modena, dove ha funzionato come aula didattica decentrata il Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia (Tab. 2).

Figura 1 – L'aula didattica di Rimini

Provincia	*Aula didattica*
Bologna	I.C. 8 "G. Guinizelli", Istituzione "G. Minguzzi" - Centro ANEKA
Modena	Laboratorio delle Macchine Matematiche Unimore; MEMO Multicentro Educativo Modena "Sergio Neri"
Piacenza	Centro di Documentazione Educativa
Ravenna	La Palestra della Scienza (Faenza)
Rimini	Centro Pedagogico per l'Integrazione dei Servizi

Tabella 2 – Le aule decentrate nelle cinque province

Per quanto riguarda la dotazione delle macchine matematiche alle aule, la maggior parte sono state costruite dall'Associazione Macchine Matematiche di Modena, che ne ha curato anche l'istallazione.

In tutti i Laboratori delle Macchine Matematiche sono presenti in molteplici copie (cinque esemplari per ogni pantografo e curvigrafo, un esemplare per ciascuna delle macchine geometriche tridimensionali e dai 25 ai 40 esemplari di Pascaline) le seguenti macchine:

- *Pantografi per le trasformazioni geometriche del piano*: pantografi per la simmetria assiale, lo stiramento, la simmetria centrale, l'omotetia (pantografo di Scheiner), la traslazione (pantografo di Kempe) e la rotazione (pantografo di Sylvester).

- *Curvigrafi*: compasso, parabolografo del Cavalieri, ellissografo ad antiparallelogramma, parabolografo a filo teso, ellissografo a filo teso, iperbolografo a filo teso, guida rettilinea.

- *Macchine geometriche tridimensionali*: genesi tridimensionale dello stiramento e compasso perfetto.
- *Macchine aritmetiche*: Pascalina "Zero +1".

Nella tabella sottostante sono riportate le fotografie e le immagini della simulazione virtuale delle macchine matematiche in dotazione alle aule didattiche. Le macchine matematiche sono presenti in vari esemplari per consentire il lavoro di gruppo nelle classi e nelle aule decentrate. Per la precisione vi sono 5 esemplari per ogni pantografo e curvigrafo, dai 25 ai 40 esemplari di pascaline (Zero+1) e un esemplare per ciascuna delle macchine tridimensionali.

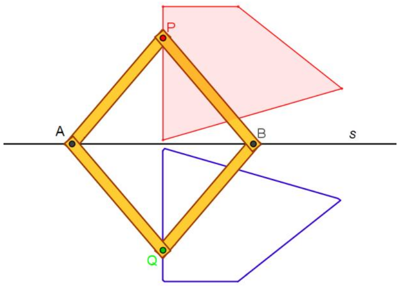
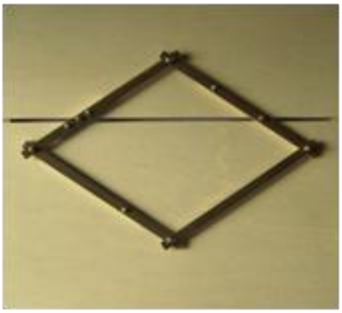
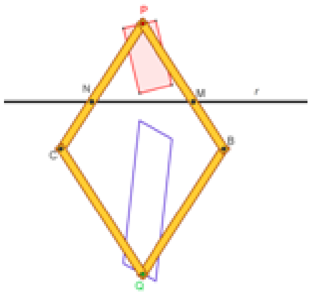
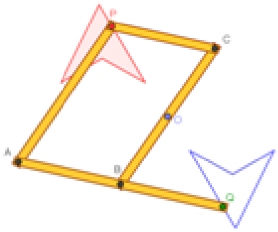
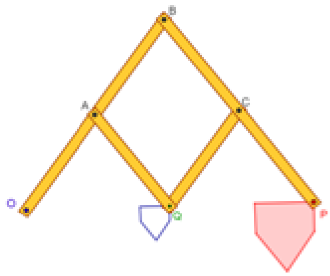
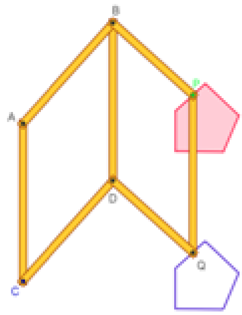
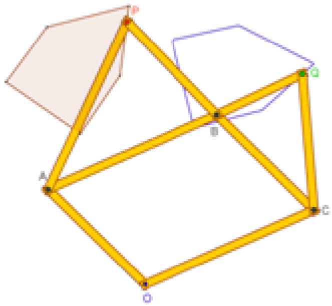
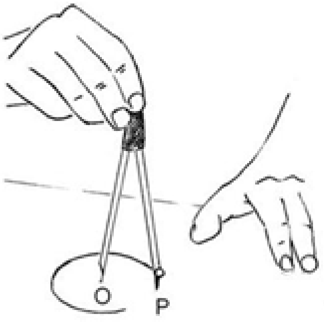
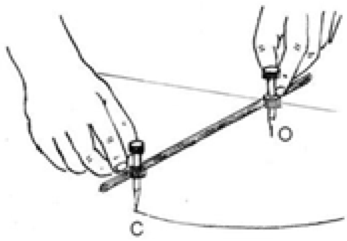
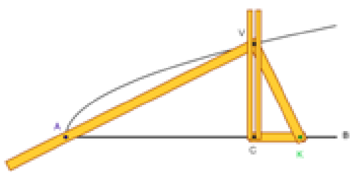
<table>
<tr><th>Foto</th><th>Immagine virtuale</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pantografo per la simmetria assiale</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pantografo per lo stiramento</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Foto	*Immagine virtuale*
Pantografo per la simmetria centrale	
	
Pantografo per l'omotetia (Scheiner)	
	
Traslatore (Kempe)	
	

<table>
<tr><th>Foto</th><th>Immagine virtuale</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pantografo per la rotazione (Sylvester)</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Compassi</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parabolografo di Cavalieri</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

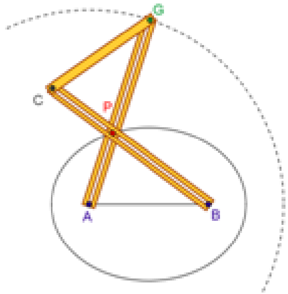
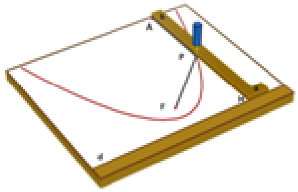
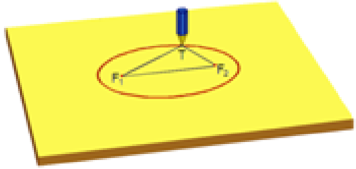
<table>
<tr><th>Foto</th><th>Immagine virtuale</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ellissografo ad antiparallelogramma</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parabolografo a filo teso</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ellissografo a filo teso</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

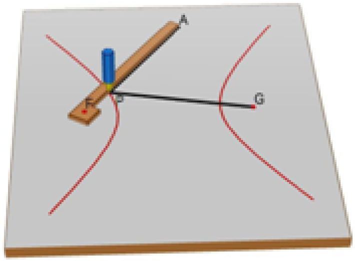
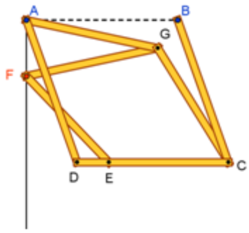
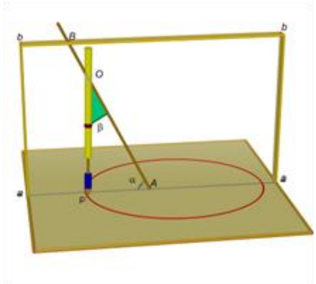
Foto	Immagine virtuale
Iperbolografo a filo teso	
	
Guida rettilinea del Kempe	
	
Compasso perfetto	
	

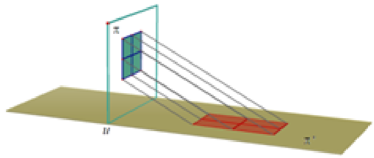
Foto	*Immagine virtuale*
Genesi tridimensionale dello stiramento	
	
Pascalina (Zero+1)	
	

Tabella 2 – La dotazione di Macchine matematiche

5.3. Coinvolgimento degli insegnanti: formazione e sperimentazione

I docenti sono stati coinvolti attraverso un bando di presentazione del progetto inviato dall'ANSAS (ex-IRRE Emilia-Romagna) nel quale si indicavano le modalità di partecipazione al progetto e gli impegni della formazione (vedi appendice).

La formazione è stata organizzata con sette incontri di 4 ore ciascuno; i temi degli incontri, comuni a tutti i gruppi provinciali, sono presentati in Tab. 3.

I sette incontri, con la presenza di due formatori e due tutor della sperimentazione (Tab. 4), avevano lo scopo di coinvolgere i docenti nelle attività di laboratorio con le macchine matematiche (vedi cap. 7) e di fornire strumenti teorici per la progettazione e l'analisi delle sperimentazioni in classe.

Incontro	*Tematica*
1° incontro	*Presentazione del progetto regionale* - Le parole chiave della matematica nelle *Indicazioni Nazionali* per il primo ciclo e gli assi culturali per il secondo ciclo. - Il laboratorio di matematica: quadro teorico. Un esempio di continuità verticale. *Analisi di un caso: costruzioni con riga e compasso.* *Strumenti*: riga e compasso
2° incontro	Il laboratorio di matematica: macchine aritmetiche: - costruzione e analisi; - notazione posizionale, algoritmi, regolarità numeriche *Strumenti*: bastoncini, righello, abaco, pascalina, calcolatrice tascabile
3° incontro	Il laboratorio di matematica: macchine matematiche per le trasformazioni - Trasformazioni geometriche: simmetria assiale e stiramento, *Strumenti*: Pantografi e Biellismi.
4° incontro	Il laboratorio di matematica: macchine matematiche per le trasformazioni. - Trasformazioni geometriche: omotetia. *Strumenti*: Pantografi e Biellismi.
5° incontro	Il laboratorio di matematica: macchine matematiche per le trasformazioni. - Trasformazioni geometriche: rotazione e simmetria centrale. *Strumenti*: Pantografi e Biellismi.
6° incontro	Il laboratorio di matematica: macchine matematiche per le coniche. - Coniche: ellisse, parabola e iperbole. *Strumenti*: curvigrafi.
7° incontro	Incontro con insegnante con esperienza nell'uso delle macchine matematiche in classe e nella preparazione di mostre.

Tabella 3 - I temi della formazione dei docenti

Le sperimentazioni sono presentate in dettaglio nel Cap. 7; qui si può ricordare che sono state svolte e documentate 79 sperimentazioni che hanno coinvolto 2.335 studenti del primo e del secondo ciclo (Tab. 5).

Provincia	*Formatori*	*Tutor*
Bologna	Garuti e Martignone (Unimore)	Banchelli e Orlandoni
Modena	Maschietto e Turrini (Unimore e Associazione MM)	Bettini e Facchetti
Piacenza	Martignone e Falcade (Unimore)	Betelli e Nolli
Ravenna	Alberghi, Gaudenzi, Pratesi e Resta (La Bottega della Scienza)	Alberghi
Rimini	Garuti e Turrini (Unimore e Associazione MM)	Cennamo e Zanoli

Tabella 4 – I formatori e i tutor del progetto

Provincia	*Numero di sperimentazioni*	*Numero studenti coinvolti*
Bologna	20	500
Modena	18	450
Piacenza*	18	760
Ravenna	16	450
Rimini	7	175
Totale	*79*	*2.335*

** Nel biennio, comprensive anche di visite ai laboratori ed eventi.*

Tabella 5 – Sperimentazioni e studenti coinvolti per provincia

Nella Tabella 6 le istituzioni scolastiche coinvolte:

Provincia	*Ist. comprensivi, scuole primarie e secondarie di I gr.*	*Licei e istituti magistrali*	*Istituti tecnici, professionali, IIS, ISISS*	*Totale*
Bologna	12	2	1	15
Modena	8	2	2	12
Piacenza	5	4	2	11
Ravenna	8	2	2	12
Rimini	8	2	5	15
Totale	*41*	*12*	*12*	*65*

Tabella 6 – Le scuole coinvolte per tipologia e provincia

Capitolo sesto
I materiali del progetto MMLab-ER

6.1. I materiali della formazione

Tutti i materiali della formazione sono stati messi a disposizione in tempo reale nei siti dei Centri Territoriali e nel sito del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena nella sezione dedicata[31]. Questi materiali consistono prevalentemente in

- presentazioni in Power Point delle tematiche trattate negli incontri di formazione,
- articoli inerenti l'idea di laboratorio di matematica;
- articoli relativi a sperimentazioni didattiche sul laboratorio con le macchine matematiche;
- il volume *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola* (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006).

6.2. I percorsi didattici

Durante la formazione non era previsto che si costruissero unità di lavoro strutturate sul laboratorio delle macchine matematiche, in quanto i docenti erano di ordini e indirizzi scolastici diversi e la scelta di fondo era quella di individuare elementi comuni su cui sperimentare nelle diverse classi, naturalmente adeguando i percorsi all'età degli studenti. Come descritto in dettaglio nel Cap. 7, l'attenzione si è focalizzata principalmente sul senso dell'attività di laboratorio (aspetti didattici e cognitivi) e su attività matematiche fondanti come congetturare, argomentare e dimostrare (aspetti epistemologici).

Le macchine matematiche sono state studiate dal punto di vista 'adulto' e i docenti sono stati messi nelle condizioni di confrontarsi e scoprire le caratteristiche matematiche delle macchine, per quanto possibile sono stati messi di fronte alle macchine "come se fossero studenti", con le dovute differenze che si esplicitavano nelle discussioni successive

[31] *http://www.mmlab.unimore.it/on-line/Home/ProgettoRegionaleEmiliaRomagna.html*

all'esplorazione delle macchine in relazione alla loro professionalità. I percorsi didattici sono emersi durante l'attività di formazione, sotto la guida dei formatori esperti. I docenti hanno poi scelto per le loro sperimentazioni percorsi anche originali in relazione alle classi coinvolte.

Essenzialmente sono stati discussi quattro tipi di percorsi didattici relativi a diverse tipologie di macchine:

- percorsi con le macchine aritmetiche;
- percorsi con riga e compasso;
- percorsi con i pantografi per le trasformazioni;
- percorsi con i curvigrafi.

All'interno di questi percorsi principali si sono poi delineati percorsi specifici relativi alle macchine scelte per la sperimentazione e al grado scolastico interessato.

Nel Cap. 12 sono presentati alcuni esempi di sperimentazioni del progetto. In particolare, ad esempio, il percorso sulle costruzioni geometriche con riga e compasso è stato sperimentato in tutti gli ordini di scuola: dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado, naturalmente con obiettivi diversi anche se la tipologia di esplorazione dello strumento era la stessa. In questo caso alla scuola primaria l'attività con il compasso è servita per definire le caratteristiche geometriche del cerchio e della circonferenza, alla scuola secondaria di primo grado per analizzare le radici geometriche di una costruzione con riga e compasso (caratteristiche delle figure geometriche coinvolte, argomentazioni sulla validità o meno di una costruzione) e alla scuola secondaria di secondo grado le attività con riga e compasso si sono spinte verso la dimostrazione della validità delle costruzioni geometriche realizzate.

Per quanto riguarda i percorsi con i pantografi, alcuni insegnanti hanno avuto come filo conduttore i pantografi per le isometrie (simmetria assiale, rotazione e traslazione); altri hanno preferito confrontare macchine che producono trasformazioni isometriche (ad esempio il pantografo per la simmetria assiale) con macchine che realizzano trasformazioni che non sono isometriche (ad esempio il pantografo per lo stiramento).

6.3. Gli strumenti per la sperimentazione

Agli insegnanti sono stati presentati, con discussione successiva, due strumenti utili per la progettazione della sperimentazione e la rendicontazione dei risultati delle sperimentazioni. Uno degli obiettivi era, infatti, anche che gli insegnanti si abituassero a riflettere e discutere su quanto avviene in classe.

Per quanto riguarda la progettazione è stata predisposta una *griglia per la progettazione* (in appendice) che, una volta compilata, doveva funzionare da guida della sperimentazione. La griglia aveva anche la funzione di rendere possibile il confronto fra le sperimentazioni che seguivano percorsi didattici simili e rendeva inoltre possibile ai tutor delle sperimentazioni seguire la progettazione. Per Modena e Bologna, dove era stata attivata una piattaforma moodle per la condivisione dei materiali, le diverse griglie erano discusse nei forum dei docenti.

Per la rendicontazione in itinere è stato predisposto un *diario di bordo* (in appendice), nel quale i docenti riportavano l'andamento della sperimentazione, con le loro riflessioni, le schede preparate per gli studenti, protocolli degli alunni significativi dell'attività svolta.

Infine per il report finale è stato predisposto un format comune a tutte le sperimentazioni. Alcuni report sono poi stati riportati nel rapporto finale o messi on line sul sito del progetto (Martignone, 2010)[32].

6.4. Le risorse per gli insegnanti

6.4.1. La pagina web del progetto

Sul sito del laboratorio delle Macchine Matematiche dall'inizio del progetto è stata aperta una pagina web dedicata al progetto nella quale sono stati messi di volta in volta i documenti ufficiali, i materiali della formazione e infine i report degli insegnanti sulle sperimentazioni e i risultati del progetto (Fig. 1).

[32] *http://www.didatticaer.it/progetti_regionali/progetto_scienze_tecnologia.aspx*

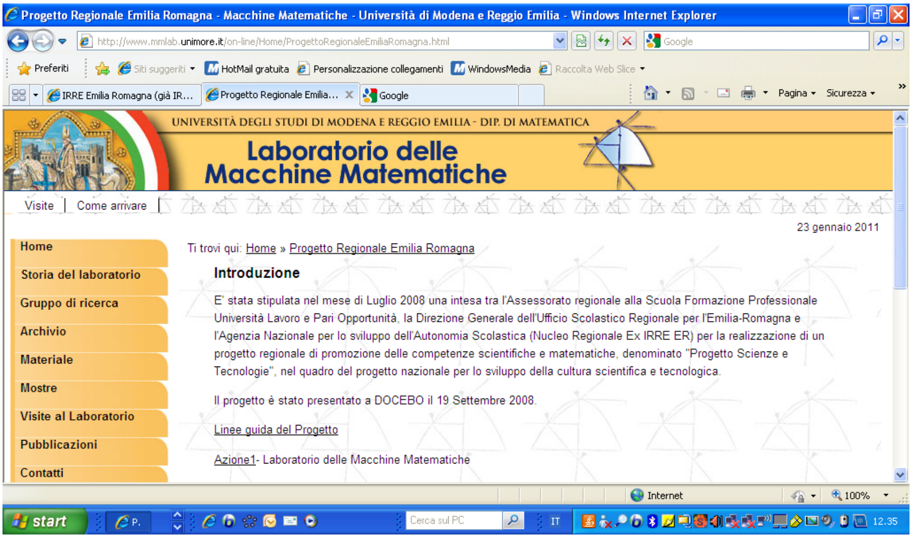


Figura 1 - La pagina principale del progetto MMLab-ER

6.4.2. *La piattaforma per le province di Modena e Bologna*

Nella seconda annualità del progetto MMLab-ER, la formazione degli insegnanti si è arricchita, per la sede di Modena prima e per quella di Bologna poi, di un dispositivo di accompagnamento, considerato in forma sperimentale, della formazione stessa. Nello specifico, tale dispositivo corrispondeva a una piattaforma tipo moodle[33]. La struttura della piattaforma, così come delle sezioni che la costituiscono, è stata definita da Michela Maschietto (co-coordinatrice del progetto). (Maschietto, 2010).

Figura 2 – Home page della piattaforma

[33] *http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/*

L'implementazione della piattaforma aveva i seguenti obiettivi, in linea con altri progetti con caratteristiche e-learning (Robutti, 2009):

- fornire uno strumento di accompagnamento e di sostegno agli insegnanti durante la fase di formazione in presenza e di sperimentazione in classe;
- favorire lo sviluppo di un lavoro collaborativo tra gli insegnanti partecipanti al progetto e fornire uno strumento di organizzazione di tale lavoro;
- predisporre uno strumento per monitorare l'appropriazione delle risorse messe a disposizione durante la formazione e la concezione di nuove risorse da parte degli insegnanti stessi.

Nella piattaforma, per ogni sede, sono presenti diverse sezioni. Di queste, tre sono state riservate agli insegnanti partecipanti al progetto: *Formazione, Sperimentazione* e *Forum*. Una quarta sezione è stata invece riservata ai soli formatori e tutor, limitatamente alla sede di Modena. Per questa sede sono state utilizzate tutte e quattro le sezioni, mentre per quella di Bologna le sezioni utilizzate sono state *Sperimentazione* e *Forum*.

La sezione *Formazione* è stata costituita e utilizzata durante il periodo riservato alla formazione in presenza, nella sola sede di Modena; nella sede di Bologna, anche per questioni temporali, non è stata utilizzata. L'obiettivo di questa sezione era quello di raccogliere il materiale elaborato per e durante gli incontri di formazione e di favorire le interazioni tra gli insegnanti. Lo spazio è stato strutturato per incontri. Per ognuno di questi, oltre al materiale utilizzato dai formatori raccolto in cartelle, è stato creato uno spazio wiki per scrivere i resoconti degli incontri. L'istituzione di un tale spazio di scrittura aveva un duplice scopo: da un lato quello di introdurre il punto di vista degli insegnanti sui vari incontri, dall'altro quello di lasciare traccia di quanto fatto e dei processi che si erano attuati, unitamente ai commenti sorti e alle discussioni svolte.

La sezione *Sperimentazione* è stata attivata per la fase di sperimentazione in classe ed è stata strutturata nell'ottica di farla diventare strumento di sostegno e accompagnamento. Infatti, l'amministratore della piattaforma ha predisposto un'organizzazione dello spazio con quattro luoghi virtuali di lavoro, uno per ogni tema di sperimentazione e/o artefatti scelti: trasformazioni geometriche, sezioni coniche, riga e compasso e 'pascalina'. Ogni spazio è stato successivamente articolato in forum e deposito di risorse. Al forum relativo a ciascun tema sono stati automaticamente iscritti gli insegnanti secondo il tipo di macchine scelte per la sperimentazione, lasciando ovviamente la possibilità a tutti gli altri insegnanti di parteciparvi e di accedere al materiale.

La sezione *Forum* era una sezione di carattere trasversale rispetto alle due già descritte. È stata utilizzata per lo scambio di informazioni tra gli insegnanti e tra insegnanti e formatori.

A livello di coordinamento delle sperimentazioni, per la sede di Modena è stato creato lo spazio Tutor, riservato ai soli tutor e formatori. Anch'esso ha facilitato lo sviluppo di un lavoro collaborativo. La Figura 3 mostra l'articolazione delle sezioni Sperimentazione e Tutor per la sede di Modena.

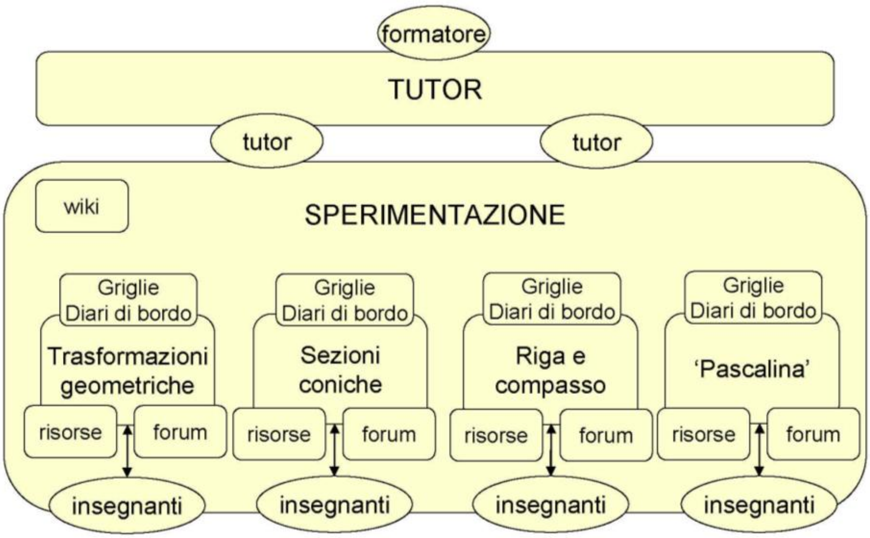


Figura 3 – Articolazione della sezione sperimentazione e tutor

Capitolo settimo
Le competenze degli insegnanti: uno sguardo alla ricerca

7.1. L'*era* degli insegnanti

Nel 2000 il Comitato Internazionale di ICMI commissionò ad un gruppo di ricercatori in didattica della matematica, coordinati da A. Sfard, una ricerca sullo stato dell'arte nel rapporto fra ricerca e pratica nell'educazione matematica. Il risultato di questo lavoro fu presentato in una conferenza plenaria al congresso di ICME[34] (Copenhagen, 2004). Nell'articolo che da questa conferenza scaturì A. Sfard (2005) così descrive i risultati di questa ricerca:

> I wish to say is that I am pleased to find out that the last few years have been *the era of the teacher* as the almost uncontested focus of researchers' attention. This is quite a chain *of the learner*. And we have certainly come a long way since *the era of the curriculum*, roughly corresponding to the 1960s and 1970s when the main players in the educational game were the developer and the textbook. I consider the re-conceptualization of the relationship between the teacher and the researcher a big leap toward research that plays a genuine role in shaping and improving practice. (Sfard, 2005, p. 405).

Si osserva inoltre che nella maggior parte delle ricerche internazionali non è tanto l'aspetto di *cosa* si insegna in classe, ma di *come* si insegna:

> The majority of the survey participants is participationist and qualitative, and this means that rather than trying to arrive at a mechanicistic view of "what works in classrooms", I focus on how things work and try to make myself aware of alternative possibilities. (*ibidem*, p. 406).

Questa attenzione è probabilmente dovuta al maggior interesse pubblico al tema dell'educazione matematica sviluppatosi in questi ultimi anni. Il motivo di tale interesse nel grande pubblico è in parte legato alla popolarità delle ricerche internazionali comparative sugli apprendimen-

[34] *http://icme11.org/*.

ti, in particolare le ricerche TIMSS-IEA[35] e PISA Project[36], e al fatto che, nonostante l'avvio di riforme innovative nell'insegnamento della matematica, in molti paesi i risultatati della rilevazione degli apprendimenti in matematica nelle ricerche comparative internazionali non sono soddisfacenti.

Negli ultimi anni gli studi sulla formazione e il ruolo degli insegnanti si sono moltiplicati; per fare un esempio, all'ultimo congresso di PME 2009[37] tenutosi a Salonicco, la tavola rotonda sul tema centrale del congresso e uno dei forum di ricerca avevano come focus la formazione degli insegnanti secondo prospettive diverse.

Nel 2008 è stato pubblicato *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (4 volumi) che rappresenta lo stato dell'arte su questo tema poiché tratta della formazione, sia iniziale sia in servizio, degli insegnanti di matematica, per tutti i livelli di scuola e da punti di vista diversi. L'opera è suddivisa in 4 volumi.

Il primo volume, *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (P. Sullivan & T. Wood, a cura di) tratta di *cosa* si intenda per formazione degli insegnanti di matematica (*mathematics teacher education*), di quale conoscenza sia necessaria per l'insegnamento della matematica tenendo conto dello sviluppo dell'insegnamento e delle concezioni (*beliefs*) collegate. Le ricerche presentate affrontano il problema da punti di vista diversi e offrono riflessioni utili a chi si occupa direttamente di formazione degli insegnanti (*teacher educators*) e a chi è deputato ad organizzarle (*university decision makers*).

Il secondo volume, *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*

[35] TIMSS-IEA, ricerca comparativa internazionale sugli apprendimenti in matematica e scienze degli studenti del IV e VIII grado (in Italia IV primaria e III secondaria di primo grado). Nel sito *http://timss.bc.edu/* si possono trovare tutte le informazioni sull'indagine TIMMS, organizzata dall'IEA per rilevare gli apprendimenti in matematica degli studenti nella scuola dell'obbligo: quadro di riferimento, prove rilasciate, rapporti sulle prove effettuate.

[36] *http://www.pisa.oecd.org/* È la *homepage* dell'indagine OCSE-PISA. Partendo da essa si possono trovare i quadri di riferimento delle indagini passate (nel 2003 il focus era sulla matematica), la documentazione sull'indagine del 2012, che sarà nuovamente sulla matematica, le domande rilasciate, i rapporti completi e una ricchissima raccolta di dati.

[37] PME International Group for the Psychology of Mathematics Education, *http://igpme.org/*. Il gruppo PME si è sviluppato come uno dei più interessanti esempi di cooperazione internazionale nel campo della ricerca sulla didattica della matematica. Il focus di PME 2009 era: *In search for Theories in Mathematics Education*.

(D. Tirosh & T.Wood, a cura di), focalizza l'attenzione su *come* si possa sviluppare la formazione degli insegnanti di matematica. Le ricerche presentate descrivono strumenti e processi coinvolti nella formazione degli insegnanti di matematica. Gli strumenti coinvolti nell'educazione matematica e in particolare nella formazione degli insegnanti sono di diverso tipo (fisici, concettuali e simbolici) e sono strettamente collegati ai processi coinvolti, cioè al particolare modo con il quale uno strumento è usato. Le ricerche riguardano tre sezioni distinte: l'uso di casi nella formazione degli insegnanti (*narratives, mathematics case discussions, video-recordings and lesson studies*), le consegne per gli insegnanti (*tasks for teachers*), che possono essere consegne scritte su esempi o consegne relative a strumenti fisici (*manipulatives or machines*), e i quadri di riferimento teorici (*theoretical frameworks*) come strumento nella formazione degli insegnanti (Tirosh, 2008).

Il terzo volume, *Partecipants in Mathematics Teacher Education* (K. Krainer & T. Wood, 2008), riguarda invece *chi* è coinvolto nella formazione: insegnanti in servizio, studenti universitari come persone in formazione, docenti universitari (*teacher educators*) in relazione al contesto in cui operano (scuole, università e sistemi nazionali di istruzione).

Il quarto volume, *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (B. Jaworski & T. Wood, 2008), si sofferma sulle competenze e conoscenze dei formatori di insegnanti di matematica e sulla loro comunità professionale dal punto di vista pratico, professionale e teorico. Molte delle ricerche di questi volumi sono state un punto di riferimento importante per la riflessione sull'attività di formazione nel progetto MMLab-ER, come si cercherà di esplicitare nei prossimi paragrafi.

7.2. La conoscenza dell'insegnante (*Teacher Knowledge*)

Uno degli aspetti più importanti quando ci si interroga sulla formazione degli insegnanti, siano essi insegnanti in servizio o studenti universitari, quindi futuri insegnanti, è la questione di quali siano le conoscenze necessarie per un efficace insegnamento della matematica. Mentre è ovvio che gli insegnanti conoscano i contenuti matematici che insegnano (o che andranno a insegnare), è altrettanto evidente che questo non è sufficiente. C'è molto di più, come ogni insegnante sa, e trovare modi per descrivere, analizzare, interpretare, comunicare e mediare questi aspetti che vanno oltre la conoscenza della disciplina è una sfida per chi si occupa di formazione degli insegnanti.

Molte delle ricerche presentate nel primo volume di *The International*

Handbook of Matematics Teacher Education trattano questo aspetto, e sono risultate utili per la riflessione e la progettazione della formazione nel progetto MMLab-ER, in particolare le diverse prospettive secondo le quali viene declinata la conoscenza necessaria all'insegnante di matematica: *conoscenza della matematica, conoscenza per insegnare matematica e conoscenza pedagogica*. Nell'introduzione al volume P. Sullivan (2008) per illustrare la complessità nell'identificare la conoscenza per insegnare matematica e descrivere queste tre prospettive utilizza un esempio tratto da una sua ricerca condotta insieme a A. Watson (A. Watson & P. Sullivan, 2008). I due ricercatori focalizzano la loro attenzione sul rapporto fra consegne (*tasks*) per gli insegnanti in formazione e pianificazione e realizzazione di lezioni di matematica (*lessons*).

Diversi insegnanti, sia in servizio che in formazione, vengono invitati ad esplicitare il contenuto matematico sotteso ad una certa consegna e le modalità di passaggio da questo contenuto alla lezione in classe. Le differenti consegne mettono in luce le diverse prospettive della conoscenza necessaria per un efficace insegnamento della matematica.

Conoscenze matematiche

La prima domanda riguarda le conoscenze matematiche sottese ad una certa situazione.

La domanda seguente è la descrizione di un'idea che potrebbe essere usata come spunto per una lezione di matematica: qual è il maggiore, 2/3 o 201/301?

Ci sono diversi modi di trovare la risposta, ma possono sostanzialmente essere distinti in due tipi

Tipo A: metodo algoritmico

Le due frazioni si possono trasformare in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore, 903, e il confronto si può fare direttamente, oppure le frazioni possono essere trasformate in numeri decimali, possibilmente con l'uso di una calcolatrice, e quindi confrontare le rappresentazioni decimali. Si osservi che si tratta di confrontare due decimali complessi come 0,666666667 e 0,6677774086 e che forse il compito così modificato potrebbe risultare per gli studenti più difficile di quello iniziale.

Tipo B: metodo intuitivo

Questa tipologia coinvolge metodi che portano a confrontare 200/300 (equivalente a 2/3) con 201/301. Si potrebbe confrontare anche 2/3 con 3/4, dove si aggiunge 1 ad entrambi i termini della frazione originaria, il che rende più grande la frazione. Provando con altri esempi di frazioni si può inferire che se aggiungo una unità al numeratore e al denominatore di una frazione, questa diventa più grande. Un altro metodo può essere quello di immaginare una situazione reale: si può pensare a 200/300 come ai tiri liberi di un giocatore di basket; 200 sono i tiri riusciti su 300. Considerando 201/301 il giocatore ha avuto un tiro riuscito in più, quindi la sua media è migliorata, allora 201/301 è maggiore di 200/300. (Sullivan, 2008, p. 3).

In entrambi i due approcci la conoscenza richiesta è una conoscenza matematica, ma non è specifica dell'insegnante o dell'insegnamento.

Conoscenza matematica per insegnare: include i processi che gli insegnanti mettono in atto quando usano questa domanda nel loro insegnamento. In questo caso è necessaria una conoscenza specialistica dell'insegnante (*Specialised Content Knowledge*) (Hill *et al.*, 2005). Ai docenti coinvolti nella ricerca viene posta la seguente questione:

> Se tu dovessi predisporre una lezione basata su questa idea, quale matematica speri che i tuoi studenti apprendano?

La conoscenza matematica in gioco riguarda il confronto di frazioni, ma la domanda offre l'opportunità agli studenti di cercare strategie intuitive o di considerare un approccio formale al confronto di frazioni. Ci si aspetta che gli insegnanti siano in grado di collegare la domanda in questione con gli obiettivi e i contenuti presenti nel curricolo di matematica di riferimento. La conoscenza richiesta non è una conoscenza matematica, che in questo caso è chiaramente un prerequisito, ma è una conoscenza del curricolo, delle connessioni all'interno del curricolo, di ciò che rende questa domanda difficile e più in generale una conoscenza delle strategie da usare, come ad esempio "trasformare un problema in un altro più semplice".

Conoscenza matematica, Conoscenza matematica per insegnare e aspetti pedagogici: quando l'insegnante è in grado di rispondere alla domanda posta all'inizio ed è capace di descrivere quali aspetti dell'insegnamento della matematica la domanda mette in gioco, deve poi convertire la domanda iniziale in una occasione di apprendimento per i suoi studenti. In questo caso entra in gioco la nozione di conoscenza pedagogica del contenuto (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) introdotta da Shulman (1986). Nella ricerca che stiamo descrivendo l'idea di conoscenza pedagogica del contenuto è stata esplorata attraverso questa domanda posta agli insegnanti:

Descrivi brevemente una lezione che potresti fare, basata su questa idea: ual è il maggiore, 2/3 o 201/301?

Ci si aspetta che l'insegnante organizzi una lezione che consenta agli allievi di vedere che ci sono diversi modi di risolvere il problema del confronto fra le due frazioni, e che pianifichi la lezione in modo da consentire agli allievi di e-splorare la consegna secondo le proprie modalità di approccio. (Sullivan, 2008, p. 4).

Le tre prospettive brevemente descritte evidenziano la sfida rappresentata dal tentativo di specificare in che cosa consista e da che cosa sia caratterizzata la conoscenza richiesta per rendere efficace l'insegnamento della matematica. Nella loro ricerca i due autori (Watson & Sullivan) focalizzano l'attenzione sulla definizione di *mathematical proficiency* (Kilpatrick, 2001) e sugli elementi principali che la caratterizzano, assunti come standard negli USA dal National Council of Teachers of Mathematics (NCTM[38]).

The committee settled on mathematical proficiency, defining it in terms of five interwoven strands to be developed in concert. Mathematical proficiency can be used to define learning goals for all students, at any age or grade of students can be judged proficient or not according to those goals. Moreover, the notion of mathematical proficiency as intertwined strands can be used to define, in a similar fashion, what it means to be proficient in teaching mathematics. (Kilpatrick, 2001, p. 106).

Kilpatrick *et al.*(2001) identificano cinque elementi interconnessi fra loro che sono alla base della *mathematical proficiency*:

a) *conceptual understanding*, which refers to the student's comprehension of mathematical concepts, operations and relations (*ibidem*, p. 118);

b) *procedural fluency*, or the student's skill in carrying out mathematical procedure flexibility, accurately, efficiently and appropriately (*ibidem*, p. 120); *strategic competence*, the student's ability to formulate, represent, and solve mathematical problems (*ibidem*, p. 124);

[38] *http://www.nctm.org/*

c) *adaptive reasoning*, the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and justification of mathematical arguments (*ibidem*, p. 129);

d) *productive disposition*, which include the student's habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful and worthwhile subject to be learned. (*ibidem*, p. 131).

Sullivan & Watson individuano tipologie di consegne (*tasks for teachers*) intorno a quattro di questi elementi, modificando il secondo elemento di Kilpatrick *et al*. in *mathematical fluency*:

- consegne che favoriscono aspetti della comprensione dei concetti (*conceptual understanding*) che sono tra le situazioni più famigliari nell'insegnamento (ad esempio, classificare oggetti utilizzando proprietà, definizioni e linguaggio verbale);
- consegne che sviluppano abilità matematiche di tipo procedurale (*mathematical fluency*), come ad esempio confrontare e adattare esercizi presi da libri di testo;
- consegne che creano opportunità di sviluppare competenze strategiche (*strategic competence*) e si riferiscono alla capacità di formulare, rappresentare e risolvere problemi matematici, compresi problemi di modellizzazione matematica;
- consegne che creano opportunità di sviluppare ragionamenti (*adaptive reasoning*) che includono capacità logica, riflessione, spiegazione e giustificazione, compreso il potere della matematica di fornire suoi propri metodi di verifica. (Watson & Sullivan, 2008, p. 109).

Questa connessione fra consegne (*tasks for teachers*) e attività matematiche (i cinque elementi della *mathematical proficiency*) è servita per analizzare le consegne per gli insegnanti del progetto MMLab-ER. In particolare abbiamo trovato simile ad alcune attività da noi proposte l'analisi di Sullivan & Watson sulle consegne per gli insegnanti per promuovere abilità come l'*adaptive reasoning*.

Adaptive reasoning refers to the capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification, including the power of mathematics to provide its own verification method. It is the glue that holds everything together. […] Central to adaptive reasoning is the justification of claims and developments of arguments. (Kilpatrick *et al*., 2001, p. 129).

Come verrà illustrato nei paragrafi successivi, i docenti coinvolti nel progetto MMLab-ER sono quasi tutti insegnanti in servizio di scuola secondaria, di primo e secondo grado, e i contenuti matematici proposti non certo nuovi per loro, erano presentati in un modo 'nuovo': attività di laboratorio con le macchine matematiche, e con la richiesta di una analisi sui processi esplorativi e argomentativi messi in atto da loro stessi, in accordo con una tipologia di task del tipo "*What sort of thinking did I do when…? What would happened if…?*". (Sullivan & Watson, 2008, p. 130).

7.3. L'evoluzione di un concetto: *Pedagogical Content Knowledge* (PCK)

Nel 1986 Shulman, allora presidente di AERA[39], richiamava l'attenzione sull' importanza della "conoscenza tipica dell'insegnante". Egli proponeva tre categorie di conoscenza per gli insegnanti: la conoscenza della disciplina (*Subject Matter Knowledge, SMK*), la conoscenza pedagogica dei contenuti (*Pedagogical Content Knowledge, PCK*) e la conoscenza del curricolo (*Curricolar Content Knowledge, CCK*). In particolare Shulman definiva la conoscenza pedagogica dei contenuti (PCK) come:

> the particular form of content knowledge that embodies the aspect of content most germane to its teachability.[…] That special amalgama of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding. (Shulman, 1986, p. 9).

Dalla metà degli anni '80 l'idea di PCK (*Pedagogical Content Knowledge*) è stata ampiamente usata per inquadrare e descrivere ricerche ed esperienze nella formazione degli insegnanti in molti campi, inclusi quelli relativi alla matematica. Un'ampia descrizione di queste ricerche, con particolare riferimento al campo della formazione degli insegnanti di matematica, si trova nell'articolo di A. Graeber & D. Tirosh (2008). Per meglio comprendere il significato di questo costrutto le due autrici propongono il seguente esempio:

> Scrivi un esempio di quesito a scelta multipla sui numeri decimali che un insegnante sappia risolvere ma che rappresenti una sfida per altri professionisti, matematici compresi.

e citano un esempio riportato da Hill, Schilling and Ball (2004, p. 28):

[39] AERA American Educational Research Association *http://www.aera.net/*

Mr. Fitzgerald sta insegnando ai suoi studenti a confrontare numeri decimali. Prepara un test per valutare se gli studenti sono in grado di ordinare una lista di numeri decimali. Quale dei seguenti insiemi è adatto per valutare se gli studenti hanno imparato a confrontare numeri decimali?

a) 0,5 - 7 - 0,01 - 11,4

b) 0,60 - 2,53 - 3,14 - 0,45

c) 0,60 - 4,25 - 0,565 - 2,5

d) Vanno bene tutti e tre perché tutti richiedono di leggere e interpretare numeri decimali.

Molti adulti non insegnanti, compresi matematici professionisti, scelgono la risposta d) e non individuano nessuna differenza fra i tre insiemi di numeri decimali presentati, mentre gli insegnanti, grazie alla loro conoscenza sull'insegnamento dei numeri decimali, sono in grado di osservare che gli insiemi a) e b) non sono adatti per verificare le conoscenze degli allievi su questo argomento. Gli studenti, infatti, potrebbero ordinare i decimali in modo corretto anche considerando il numero decimale come intero (1 - 5 - 7 - 114 oppure 45 - 60 - 253 - 314), mentre nel caso dell'insieme c) un approccio di questo tipo porterebbe ad un ordinamento errato. La conoscenza necessaria per rispondere al quesito precedente è qualcosa di più della conoscenza matematica: è tipica dell'insegnamento in quanto esprime la conoscenza di come gli studenti si approcciano a questo compito. Quanto descritto è uno degli aspetti del costrutto di Shulman (1986). (Graeber & Tirosh, 2008, p. 118).

La domanda che si pose Shulman è la seguente: esistono tipologie specifiche di conoscenza necessarie all'insegnamento?

Negli anni successivi al lavoro di Shulman molti ricercatori hanno cercato di ampliare e specificare meglio la nozione di PCK, in particolare mettendo in luce altri aspetti che lo caratterizzano. Un esempio è rappresentato dai lavori di Fennema & Franke (1992), che introducono il costrutto di *Knowledge of students* e quello di *Knowledge of representations*. Più recentemente Even & Tirosh (1995) hanno messo in luce la necessità di studiare le fonti (*sources*) a cui gli insegnanti attingono per rispondere a domande, idee o ipotesi degli studenti., evidenziando che una delle principali fonti è relativa alla conoscenza che gli insegnanti hanno degli studenti. I due autori distinguono fra *knowing that e knowing why.* La prima si riferisce alla conoscenza basata su esperienze o ricerche sulle concezioni comuni degli studenti, la seconda si riferisce alla conoscenza delle possibili fonti di queste concezioni.

Il termine *Pedagogical Content Knowledge* è diventato parte del 'lessico famigliare' di coloro che si occupano di formazione degli insegnanti, tuttavia, anche all'interno dello stesso ambito, come l'educazione matematica, esso è utilizzato con accezioni diverse da quelle date inizialmente da Shulman e spesso nemmeno equivalenti fra loro. Questa è una delle ragioni per le quali la nozione di PCK è considerata un po' elusiva o ambigua. Graber & Tirosh concludono la loro disamina esprimendo la necessità di qualificare la nozione di PCK in modo più specifico con particolare riferimento all'educazione matematica. Propongono per questo alcune piste di lavoro interessanti:

- le diverse componenti del PCK possono essere associate a diverse definizioni di 'qualità dell'insegnamento' della matematica?
- quali metodi possono essere utilizzati praticamente e su larga scala per valutare il PCK dei docenti?
- quali componenti del PCK devono essere prese in considerazione nella formazione dei futuri insegnanti, e quali, invece, per lo sviluppo professionale degli insegnanti in servizio?

7.4. Il Progetto *Mathematics Knowledge for Teaching* (MKT)

Una svolta recente nel tentativo di caratterizzare al meglio la nozione di Shulman viene dai lavori di Ball & Bass (2003), che introducono la nozione di conoscenza matematica per l'insegnamento (*Mathematics Knowledge for Teaching, MKT*), che deriva dal loro approccio nell'individuazione delle conoscenze necessarie nell'insegnamento della matematica. Il focus del lavoro di ricerca di questo gruppo è *l'insegnamento* (*the work of teaching*): cosa fanno gli insegnanti quando insegnano matematica? Come procedono quando fanno emergere ragionamenti, comprensioni e abilità? Gli autori definiscono in questo modo il loro costrutto:

> By *mathematical knowledge for teaching* we mean the mathematical knowledge needed to carry out the work of teachings mathematics. Important to note here is that our definition begins with teaching, not teachers. […] Because teaching involves showing students how to solve problems, answering students' questions and checking students' work, it demands an understanding of the content of the school curriculum. Beyond these obvious tasks, we seek to identify others aspects of the work and to analyse what these reveal about the content demands of teaching (Ball *et al.*, 2008, p. 399).

Il modello sviluppato da Ball & Bass e dal loro team di ricerca è interessante in quanto, oltre ad incorporare i termini coniati da Shulman, offre una modellizzazione delle conoscenze che un insegnante di matematica dovrebbe possedere. La nozione di *Mathematics Knowledge for Teaching* è rappresentata dal diagramma sottostante, nel quale l'evoluzione dell'idea di Shulman è stata organizzata come l'insieme della matematica in quanto disciplina da insegnare (*Subject Matter Knowledge*) e delle componenti significative relative agli aspetti pedagogici (*Pedagogical Content Knowledge*).

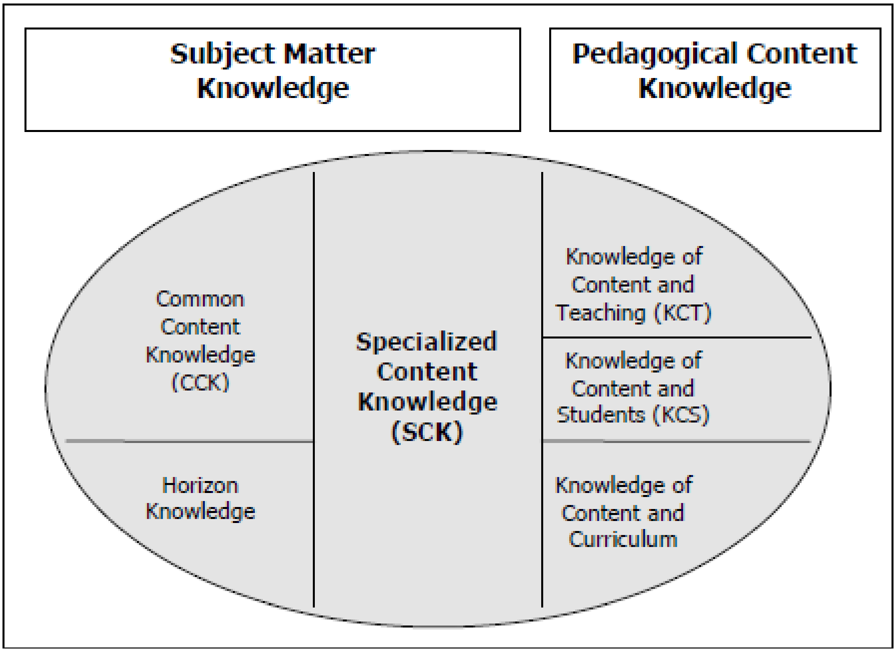


Figura 1 - Il modello della Mathematics Knowledge for Teaching

Da un lato abbiamo la conoscenza della matematica come disciplina (*Subject Matter Knowledge, SMK*) nella quale si distingue la conoscenza matematica comune (*Common Content Knowledge, CCK*), che è la conoscenza matematica non specifica dell'insegnante; l'orizzonte della conoscenza (*Horizon Knowledge*), che rappresenta la consapevolezza di come i contenuti matematici sono correlati fra loro all'interno della matematica; e la conoscenza specialistica dell'insegnante (*Specialised Content Knowledge, SCK*), che ci pare l'elemento di novità del modello, definita dagli autori in questo modo:

Teaching may require a specialized form of pure subject matter knowledge, 'pure' because it is not mixed with knowledge of students or pedagogy and is thus distinct from the pedagogical content knowledge identified by Shulman and his colleagues, 'specialized' because it is not needed or used in settings other than mathematics teaching. […] For instance, deciding whether a method or procedure would work in general require mathematical knowledge and skill, not knowledge of students or teaching. It is a form of mathematical problem solving used in the work of teaching. (Ball *et al*., 2008, p. 400).

Dall'altro lato del modello abbiamo la conoscenza pedagogica dei contenuti (*Pedagogical Content Knowledge, PCK*) che è articolata in conoscenza dei contenuti e dell'insegnamento (*Knowledge of Content and Teaching, KCT*), relativa alle azioni dell'insegnante che hanno lo scopo di favorire la costruzione di significati matematici da parte degli studenti, come ad esempio scegliere appropriate rappresentazioni; in conoscenza dei contenuti e degli studenti (*Knowledge of Content and Students, KCS*), relativa alle ipotesi sui comportamenti degli studenti in un certo compito assegnato, come ad esempio aver presente quali sono gli errori più comuni che gli studenti fanno nell'applicazione di un certo algoritmo; infine abbiamo la conoscenza dei contenuti del curricolo (*Knowledge of Content and Curriculum*), che può servire all'insegnante per considerare il curriculum in termini di idee matematiche chiave.

Tale modello è stato un utile strumento interpretativo delle attività di formazione svolte nel progetto MMLab-ER, in particolare ci ha permesso di focalizzare l'attenzione sulla conoscenza specifica dell'insegnamento (SCK) in attività di laboratorio di matematica con l'uso di strumenti, di cogliere le differenze fra questa e la conoscenza pedagogica (PCK) e di indirizzare consapevolmente le azioni di formazione in una direzione o nell'altra.

7.5. L'analisi culturale dei contenuti (CAC)

Una posizione interessante sul tema della conoscenza necessaria per l'insegnamento è quella rappresentata da Boero & Guala (2008), che mettono in luce un ulteriore aspetto della formazione degli insegnanti: l'analisi culturale del contenuto da insegnare (*Cultural Analysis of Content,* CAC). Se vogliamo sviluppare la conoscenza matematica degli insegnanti (o futuri insegnanti), sostengono i due autori, dobbiamo farci carico delle loro convinzioni sulla matematica e sull'insegnamento della matematica. L'analisi culturale dei contenuti da insegnare aggiunge alla conoscenza professionale, generalmente intesa come conoscenza della disciplina (*Subject Matter Knowledge*), conoscenza pedagogica del contenuto (*Pedagogical Content Knowledge*) e conoscenza pedagogica generale

(*General Pedagogical Knowledge*), la comprensione di come la matematica può essere organizzata in modi diversi secondo necessità diverse e circostanze sociali e storiche, e di come la matematica partecipi alla cultura umana in interazione con altri domini culturali (l'economia, la fisica, le scienze, la filosofia, ecc.). L'analisi culturale dei contenuti può portare gli insegnanti a mettere radicalmente in discussione le loro convinzioni sulla matematica in generale e su aspetti specifici in particolare. I due autori affermano che:

> Connections between PCK and some aspects of CAC may be established only when dealing with different ways of representing a given topic or the relationships between students' conceptions and social and historical roots of mathematical knowledge. (Boero & Guala, 2008, p. 225).

In effetti né la matematica come cultura, né le relazioni dinamiche tra la matematica e altre culture sono prese in considerazione nel costrutto di Shulman (PCK) e nel modello della Mathematics Knowledge for Teaching (MKT). Si tratta di un elemento importante da mettere in evidenza in quanto la componente storica ed epistemologica è uno dei componenti della ricerca in didattica della matematica in Italia e in particolare delle ricerche del gruppo del Laboratorio delle Macchine Matematiche. In tali ricerche sono sempre presenti almeno tre componenti, secondo il quadro della Ricerca per l'Innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998):

- *una componente epistemologica*, con attenzione ai significati matematici;
- *una componente didattica*, con attenzione ai processi in classe;
- *una componente cognitiva*, con attenzione ai processi di apprendimento.

Nel lavoro di Boero & Guala interessanti appaiono le consegne che possono sviluppare negli insegnanti un approccio all'analisi culturale dei contenuti, abbastanza simili alle consegne proposte nella formazione del progetto MMLab-ER:

- analisi di soluzioni di problemi prodotte da studenti o da colleghi secondo criteri di correttezza, chiarezza ed efficacia;
- analisi di consegne per gli studenti;
- ricostruzione di una mappa concettuale di un determinato contenuto;
- produzione di consegne per gli studenti a partire da consegne proposte a livello adulto con lo scopo di individuarne i pre-requisiti e le principali difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare.

L'analisi culturali dei contenuti è una sfida difficile, ma inevitabile per la formazione degli insegnanti e presenta aspetti delicati, come evidenziato da Boero & Guala.

The 'transfer' problem is one of the most delicate for mathematics teacher education on CAC. The very nature of CAC does not allow acquired knowledge to be directly transferred to other domains. […] Transferability can (and should) concern the teachers' attitude towards the content; "*How did this notion, or method, or activity develop over history? How did its organization and symbolic representation change?*", "*What was, and is now its relevance in mathematics? And in the applications of mathematics?*", "*What are the analogies with other domain of mathematics?*" are crucial questions related to CAC that the teacher should learn to pose and (at least in some cases) to answer with the help of appropriate sources and or experts. (Boero & Guala, 2008, p. 233).

Per questo motivo Boero & Guala parlano di *analysis* e non di *knowledge* in quanto focalizzano l'attenzione non su *cosa sa* un insegnante di un certo contenuto e di *come lo usa* ma piuttosto se è in grado di analizzare la dimensione storico-epistemologica e culturale di un certo contenuto matematico[40].

Boero & Guala descrivono e analizzano due casi relativi ad aspetti cruciali e delicati dell'insegnamento della matematica: il rapporto fra statistica e probabilità e quello fra produzione di congetture e dimostrazione (*conjecturing and proving*).

The impact on teachers of CAC education in this area (conjecturing and proving) might be: first, to let them experience these aspects of mathematical activities; second, to induce them to distinguish between the development of productive processes, on one side, and the elaboration of their products (according to cultural constraints), on the other, as different sides of mathematical competency. (Boero & Guala, 2008, p. 231).

Nelle attività di formazione del progetto questo elemento di distinzione fra processi (esplorare, congetturare, argomentare e dimostrare) e prodotti (congetture e dimostrazioni) è esplicito e condiviso con gli insegnanti. In generale, come si vedrà negli esempi riportati, la nozione di analisi culturale dei contenuti (CAC) è servita per individuare consegne cruciali nelle attività di formazione con gli insegnanti.

[40] Boero, 2010, *Comunicazione personale.*

Capitolo ottavo
La formazione degli insegnanti nel progetto MMLab-ER

8.1. Introduzione

Il Progetto MMLab-ER ha tra le sue finalità principali la diffusione su scala regionale di una metodologia di attività di laboratorio di matematica con l'uso di macchine matematiche, coerente con i risultati della ricerca promossa dal gruppo del Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia. Uno degli aspetti cruciali del Progetto è rappresentato dal coinvolgimento degli insegnanti attraverso un corso di formazione centrato sulle metodologie del laboratorio di matematica, nello specifico con l'uso di macchine matematiche.

Sul tema della formazione degli insegnanti in servizio esiste una vasta bibliografia e un grande interesse nel mondo della ricerca educativa. È sempre importante tener conto che questi insegnanti si sono costruiti una propria epistemologia e riflessione della disciplina insegnata, in questo caso la matematica, sulla base principalmente della propria esperienza professionale. Bisogna infatti non perdere mai l'occasione di porre in evidenza il fatto che l'insegnante metterà sempre in campo sé stesso e le proprie convinzioni, sociali, didattiche e filosofiche (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009).

Considerato che i temi della formazione nel Progetto riguardano una metodologia (*didattica laboratoriale*) e artefatti (*macchine matematiche*) inconsueti e poco praticati nella scuola, è stato cruciale tener conto di questi aspetti per far sì che gli insegnanti aderissero il più possibile allo spirito del Progetto, e soprattutto, che ne cogliessero gli elementi di novità rispetto a pratiche didattiche 'tradizionali'. Un ulteriore elemento di adesione e di coinvolgimento è dovuto al fatto che gli insegnanti del Progetto avrebbero in un secondo tempo sperimentato nelle loro classi metodologie e contenuti appresi e discussi durante il corso di formazione.

È importante sottolineare che il corso di formazione non prevedeva la preparazione di attività didattiche strutturate (Unità didattiche o UDA[41]): l'obiettivo principale era creare una comunità di pari (ricercatori, formatori, tutor e docenti) che riflettesse, discutesse e sperimentasse

[41] Unità Didattiche di Apprendimento (D. Lgvo 59/2004).

in prima persona, secondo le proprie professionalità, il nucleo centrale del Progetto: *il laboratorio di matematica con le macchine matematiche.*

Questo capitolo cerca di rendere conto della complessità degli elementi fondamentali del corso di formazione, attraverso una descrizione ragionata di quanto è avvenuto negli incontri.

8.2. Il laboratorio con le macchine matematiche

Due sono gli aspetti che hanno caratterizzato la progettazione e la realizzazione della formazione degli insegnanti nel progetto MMLab-ER: l'idea di laboratorio di matematica e le attività con le macchine matematiche.

a) Il laboratorio di matematica

Il termine laboratorio rimanda al lavoro, alle dimensioni dell'agire e del fare. In qualche modo evoca anche laboriosità e quindi attenzione, coinvolgimento, partecipazione al processo di costruzione del prodotto. Quando si parla di laboratorio di matematica […] lo si fa spesso per evocare un modello di insegnamento-apprendimento diverso dalla lezione, ossia quello che contraddistingue le azioni che si esercitano nei luoghi e nelle istituzioni preposte all'educazione e all'istruzione. […] Il laboratorio fa pensare ad un coinvolgimento del corpo e della mente, la lezione evoca una partecipazione esclusivamente intellettuale. (Paola, 2008, p. 520).

Inoltre, come si è ampiamente descritto nel capitolo secondo:

La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. (UMI 2003)[42].

In queste citazioni ritroviamo molti degli elementi che hanno guidato l'attività di formazione e che avevano lo scopo di coinvolgere direttamente gli insegnanti in attività di didattica laboratoriale, per consentire loro di organizzare e gestire attività di laboratorio di matematica nelle loro classi. La didattica del laboratorio di matematica, in quanto collegata a processi esplorativi di situazioni problematiche e/o di strumenti e a momenti di confronto e di interazione sociale, favorisce lo sviluppo di

[42] *http://umi.dm.unibo.it/scuola--99.html*: La matematica per il cittadino.

processi argomentativi importanti per l'acquisizione di competenze significative nell'educazione matematica degli studenti.

b) Le attività con le macchine matematiche

Negli anni che hanno preceduto il Progetto MMLab-ER il gruppo del Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia ha condotto diverse attività di ricerca e sperimentazione (Ferri, Mariotti & Bartolini Bussi, 2005; Bartolini Bussi & Maschietto, 2006; Maschietto & Martignone, 2008; Martignone, 2009). Il Progetto regionale ha offerto l'opportunità di ripensare ai materiali e alle ricerche svolte, portando innovazioni e approfondimenti. È importante sottolineare che nella formazione del Progetto l'attenzione si è rivolta in particolar modo alle potenzialità che le attività con le macchine matematiche offrono nello sviluppo di processi esplorativi[43]. La possibilità di esplorare e manipolare fisicamente oggetti, come ad esempio pantografi e curvigrafi, insieme ad appropriati percorsi, compiti e richieste, induce modalità di esplorazione e di costruzione di significati matematici difficilmente riscontrabili in altre situazioni. Da questo punto di vista le attività con le macchine matematiche danno l'opportunità a docenti e allievi di produrre ipotesi relative al funzionamento della macchina e, eventualmente, argomentazioni che mettono in relazione il funzionamento della macchina con la matematica in essa incorporata.

8.3. Le componenti fondamentali della formazione: attività matematiche, macchine matematiche e consegne per gli insegnanti

Le ipotesi alla base della progettazione della formazione degli insegnanti possono essere distinte secondo due aspetti specifici relativi alla conoscenza per l'insegnante (*teacher knowledge*) già descritta.

Relativamente alla conoscenza specialistica dell'insegnante (*Specilised Content Knowledge, SCK*) si è focalizzata l'attenzione sull'importanza delle attività di congettura, argomentazione e dimostrazione in matematica da un punto di vista culturale (matematica nella storia e approccio alla dimostrazione) e da un punto di vista dell'analisi dei processi sottesi (esplorazione, genesi di congetture e produzione di argomentazioni).

[43] Questa attenzione verso i processi esplorativi si collega a filoni di ricerca svolti da R. Garuti sulla relazione fra processi argomentativi e dimostrativi (Boero *et al.*, 2007; Garuti, 2009) e da F. Martignone sui processi cognitivi in attività di problem solving (Tesi di dottorato in didattica della matematica, Università di Genova, 2007).

Relativamente alla conoscenza pedagogica (*Pedagogical Content Knowledg, PCK*) l'ipotesi di lavoro era che le attività con artefatti attraverso opportune consegne e seguendo una metodologia laboratoriale potessero essere un ambiente adatto per favorire negli studenti lo sviluppo di processi di genesi di congetture, produzione di argomentazioni, fino alla costruzione di dimostrazioni, e che il confronto e la discussione collettiva su questi processi potevano diventare un utile strumento didattico.

Una delle peculiarità della formazione nel Progetto MMLab-ER è stata quella di collegare attraverso la metodologia laboratoriale alcuni degli aspetti fondamentali dell'attività matematica (spiegare, giustificare, congetturare, argomentare, dimostrare, porsi e risolvere problemi) con consegne legate all'esplorazione e all'analisi di strumenti provenienti dalla storia della matematica. Per far questo abbiamo utilizzato diverse modalità di lavoro e in particolare: esplorazione delle macchine in piccolo gruppo, attività di risoluzione di problemi sulle variazioni delle macchine, discussione collettiva per favorire l'esplicitazione, la condivisione e il confronto di strategie risolutive tra pari e con esperti.

Per rendere più incisiva l'esposizione degli elementi chiave della formazione nel progetto MMLab-ER si è distinto fra formazione sul laboratorio di matematica e formazione sulle macchine matematiche, ma è importante ricordare che nel loro complesso questi elementi costituiscono un tutt'uno in quanto le attività di formazione hanno riguardato il laboratorio di matematica *con* le macchine matematiche.

8.3.1. La formazione sul laboratorio di matematica

Gli elementi principali di cui si è tenuto conto nella costruzione del percorso di formazione del Progetto MMLab-ER sulla didattica laboratoriale sono stati:

a) attenzione agli aspetti legati all'interazione tra pari (in questo caso gli insegnanti in formazione) e con esperti (docenti formatori). In particolare attraverso:

- *confronto di strategie* di soluzione di un problema. Ad esempio, durante le attività proposte con riga e compasso sono emerse costruzioni geometriche diverse, a cui erano sottese proprietà matematiche differenti. Agli insegnanti è stato richiesto di presentare la propria costruzione, esplicitando le ipotesi che li avevano guidati e di confrontarle con quelle dei colleghi, rilevando analogie, differenze e motivazioni;
- *discussione matematica* sulle esplorazioni e sulle congetture prodotte:

le esplorazioni delle macchine matematiche sono state svolte in piccolo gruppo e al termine di ogni esplorazione si è tenuta una discussione matematica, orchestrata dal formatore, per condividere, confrontare e mettere in luce i diversi aspetti legati alle attività con le macchine (epistemologici, cognitivi e didattici);

- *analisi di discussioni matematiche*. Durante le attività di formazione sono stati presentati e analizzati esempi di discussione matematica in classe per evidenziare il ruolo dell'insegnante (scelta delle consegne e degli elaborati degli studenti utili per il confronto, fase di istituzionalizzazione, ecc.), le possibili modalità di intervento dell'insegnante (rispecchiamento, parafrasi, ecc.) e le diverse tipologie di discussione matematica (discussioni di bilancio, di concettualizzazione, ecc.) (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995).

b) Attenzione agli aspetti legati all'analisi dei processi esplorativi e argomentativi che si possono sviluppare nel laboratorio di matematica.

Congetturare e dimostrare in matematica è riconosciuto da tempo come una sfida educativa importante in quanto aspetto caratterizzante della cultura e dell'educazione matematica. È inoltre percepita dagli insegnanti come una delle principali difficoltà che gli studenti incontrano, come emerge dalle indagini comparative internazionali e nazionali (TIMMS, PISA, INVALSI)[44], anche se presente come elemento centrale sia nelle *Indicazioni per il curricolo* 2007 (primo ciclo di istruzione), sia nel *Nuovo Obbligo di Istruzione* (biennio scuola secondaria di secondo grado).

Al fine di creare un'attenzione e una consapevolezza dei docenti su questo tema si è dato ampio spazio ai seguenti momenti:

- *riflessioni sui propri processi esplorativi ed argomentativi*. In tutte le attività è sempre stato richiesto agli insegnanti di descrivere in modo puntuale, per quanto possibile, il processo che porta a risolvere un problema dato, ad esempio una costruzione geometrica, oppure ad esplicitare le argomentazioni a sostegno della produzione di una certa ipotesi, ad esempio sul funzionamento di una macchina matematica. In questo modo si è cercato di spostare l'attenzione degli insegnanti dal prodotto (risultato di una costruzione o riconoscimento delle leggi matematiche implementate dalla macchina) al processo che lo aveva generato;

- *riflessioni sui processi esplorativi e argomentativi altrui.* Durante le di-

[44] Nella prova Nazionale INVALSI di matematica alla fine del primo ciclo di istruzione del giugno 2010 i tre quesiti ritenuti dai docenti più difficili erano quelli nei quali si chiedeva o di giustificare una risposta o di mostrare i calcoli fatti per arrivare ad essa. Per informazioni vedere: *http://www.invalsi.it/invalsi/index.php*.

scussioni agli insegnanti è stato richiesto di analizzare i processi esplorativi e argomentativi prodotti dai colleghi, con lo scopo di individuare le radici di certe costruzioni o congetture, e di analizzare il percorso di risoluzione realizzato. Si è cercato di portare gli insegnanti a prestare attenzione a differenti possibili strategie e/o processi argomentativi simili a quelli che potrebbero emergere in classe e alla ricchezza che il confronto di strategie diverse può apportare all'attività didattica in classe, facendone così un importante strumento didattico.

8.3.2. La formazione sulle macchine matematiche

Nella formazione sulle macchine matematiche si è puntata l'attenzione sugli aspetti storici ed epistemologici relativi alle macchine: la proposta di strumenti storici (ossia strumenti appartenenti alla fenomenologia della storia della matematica) e presenti in oggetti della vita quotidiana (appendiabiti, tergicristalli, carrelli elevatori, ecc.) come una scelta peculiare del gruppo di ricerca del Laboratorio delle Macchine Matematiche. Questi strumenti hanno uno spessore culturale, in quanto prodotto dell'evoluzione della storia della matematica, e incorporano elementi espliciti del sapere matematico.

Gli elementi principali di cui si è tenuto conto nella formazione sulle macchine matematiche sono stati:

a) *esplorazione guidata delle macchine matematiche*. Tutte le attività di esplorazione delle macchine matematiche hanno come denominatore comune quattro domande chiave. L'esplorazione, la produzione di ipotesi, i processi argomentativi e la costruzione di dimostrazioni, infatti, sono stati sempre guidati dalle seguenti domande:

Come è fatta la macchina? Con questa prima domanda si vuole focalizzare l'attenzione dei docenti sulle componenti fisiche della macchina matematica, analizzata quindi come artefatto. Ad esempio, nei sistemi articolati la lunghezza e il confronto tra le aste, la presenza di punti fissi e di scanalature.

Cosa fa la macchina? L'attenzione si sposta verso la macchina matematica come strumento. Si passa da una fase di esplorazione della struttura della macchina in relazione ai movimenti possibili (posizioni limite, zone di piano raggiungibili dalla macchina, gradi di libertà dei diversi punti, ecc.), all'appropriazione degli schemi d'uso della macchina (individuare puntatore e tracciatore, ricalcare e/o tracciare figure nel caso dei pantografi; eseguire addizioni e sottrazioni nel caso della Pascalina, ecc.). Questa esplorazione mira alla generazione di congetture sul funzionamento della macchina.

Perché lo fa? La domanda vuole stimolare la produzione di argomentazioni a sostegno delle ipotesi prodotte nel punto precedente. Le argomentazioni possono basarsi su considerazioni fisico-meccaniche legate alla struttura e al movimento della macchina oppure sull'individuazione delle proprietà matematiche incorporate in queste. A questo processo di produzione di argomentazioni può seguire la costruzione delle dimostrazioni delle congetture prodotte.

Cosa succederebbe se …? La domanda coinvolge possibili modifiche nella struttura della macchina e quindi la produzione di ipotesi sui cambiamenti nel funzionamento e nei risultati della macchina.

Queste quattro domande sono state l'impianto fondamentale sul quale si sono basate sia le attività durante il corso di formazione, sia le sperimentazioni in classe.

b) *Attività di problem solving con le macchine matematiche.* L'esplorazione delle macchine matematiche si presta a realizzare situazioni di problem solving 'inconsuete' per gli insegnanti in formazione. Queste possono riguardare problemi di modellizzazione quando si tratta di individuare, modificare, giustificare la struttura della macchina matematica in oggetti della vita reale: carrelli elevatori o cavatappi (pantografo per la simmetria assiale), strutture per tende da sole o tergicristalli (pantografo per la traslazione del Kempe) (Fig. 1).

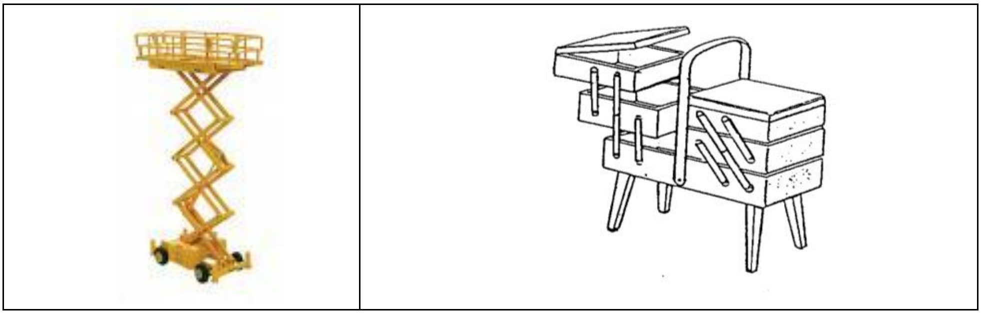


Figura 1 - Oggetti quotidiani con strutture riconducibili ai pantografi

In altri casi le attività di problem solving riguardano la struttura matematica della macchina e sono realizzate attraverso situazioni di questo tipo:

Come modificare la struttura mantenendo la natura della macchina, cioè la trasformazione che realizza? Perché una certa modifica alla struttura della macchina fa sì che questa non funzioni, cioè non realizzi la trasformazione usuale? Come 'aggiustare' una macchina che non realizza la trasformazione voluta?

In questo tipo di attività gli insegnanti devono essere messi, con le ovvie differenze, in situazioni di apprendimento analoghe a quelle in cui posso trovarsi gli studenti (lavoro di gruppo, discussioni collettive orchestrate da un docente esperto, ecc.). Inoltre le consegne e le situazioni di problem solving dovrebbero rappresentare una 'sfida' per gli insegnanti secondo diversi punti di vista: le macchine matematiche sono perlopiù oggetti sconosciuti ai docenti, e quindi possono esplorarle e analizzarle "*come se fossero studenti di fronte a qualcosa di nuovo da capire*".

8.4. Quattro esempi paradigmatici

L'utilizzo delle macchine matematiche, come di ogni altro tipo di strumento, può avere obiettivi differenti secondo le diverse tipologie di percorsi didattici che ne sfrutteranno alcune caratteristiche piuttosto che altre. Ad esempio nelle sperimentazioni che hanno preceduto il Progetto uno degli obiettivi principali delle attività svolte con le macchine matematiche era di utilizzarle per introdurre (o consolidare) le leggi matematiche che esse incorporano. Nelle attività proposte durante la formazione la scelta è stata quella di utilizzare le macchine soprattutto con compiti e percorsi che favorissero lo sviluppo dei processi di produzione di congetture, di argomentazione e di costruzione di dimostrazioni.

Nello schema seguente (Fig. 2) si vuole mettere in luce il legame fra macchine e attività matematiche sulle quali si e focalizzata l'attenzione nella formazione degli insegnanti del progetto MMlab-ER.

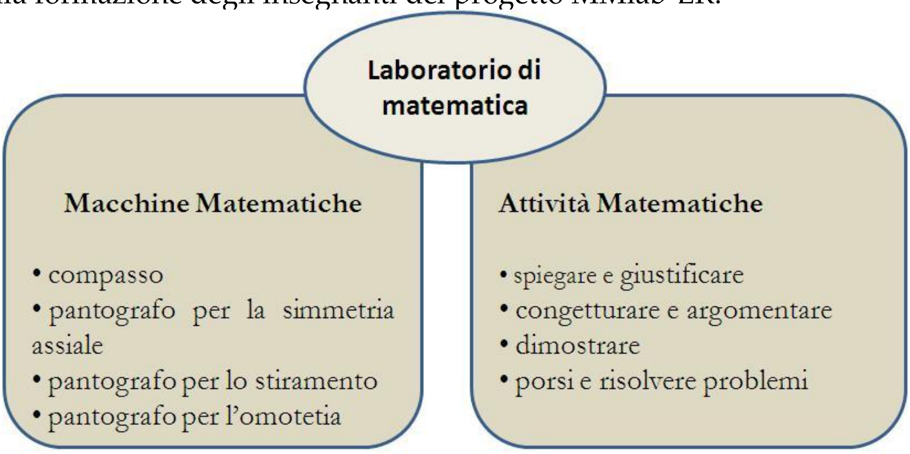


Figura 2 - Relazione fra macchine e attività negli esempi proposti

In questo paragrafo si presentano esempi di attività e consegne cercando di mettere in luce i tre elementi principali del lavoro con gli insegnanti: le attività matematiche, le macchine matematiche e le consegne per gli insegnanti. Per ognuna delle consegne si cercherà di mettere in evidenza i contenuti matematici e pedagogici coinvolti. La tabella 1 riassume gli esempi che si analizzano.

Attività matematiche	*Macchine matematiche*	*Consegne per gli insegnanti*
Spiegare e giustificare	Riga e compasso	*Costruisci un triangolo isoscele. Confronta le diverse costruzioni. Ripercorri una costruzione data.*
Congetturare e argomentare	Pantografo per la simmetria assiale	*Esplora la macchina: come è fatta? cosa fa? perché lo fa?*
Dimostrare	Pantografo per l'omotetia	*Confronta due dimostrazioni della stessa macchina.*
Porsi e risolvere problemi	Pantografi per la simmetria assiale e sue variazioni	*Cosa succederebbe se...?*

Tabella 1

8.4.1. Spiegare e giustificare: costruzioni del triangolo isoscele con riga e compasso

Consegna per i docenti:

Costruisci con riga e compasso un triangolo isoscele; presenta ai colleghi la tua costruzione esplicitando i ragionamenti che hai fatto, lo sviluppo della costruzione argomentando le scelte fatte. Trova analogie e differenze tra le diverse costruzioni cercando di capirne le motivazioni. Analizza una costruzione in cui è esplicitato solo il disegno iniziale e quello finale.

Questo esempio ha lo scopo di chiarire gli aspetti legati all'*interazione* nel laboratorio di matematica su cui abbiamo lavorato con i docenti del corso. L'obiettivo era di introdurre gli insegnanti alla metodologia del laboratorio di matematica in modo che emergessero gli aspetti legati alle interazioni tra pari e con gli esperti e i processi esplorativi e argomentativi coinvolti. La prima attività si è svolta utilizzando una macchina matematica già conosciuta da tutti i docenti: il compasso. Abbiamo scelto di cominciare con una macchina matematica fondante la storia della matematica e ampiamente utilizzata in classe perché consentiva di semplificare la fase di esplorazione della macchina, entrando immediatamente nel contesto metodologico del laboratorio. Inoltre questa fase del corso ha avuto anche lo scopo di proporre agli insegnanti una rivalutazione delle costruzioni con riga e compasso nell'insegnamento-apprendimento della matematica. Il compasso, infatti, seppur molto usato a scopi pratici, non è spesso analizzato nei suoi aspetti teorici e nel suo ruolo nella storia della matematica (ad esempio in testi classici come gli Elementi di Euclide). Seguendo le linee guida del corso, sono state proposte attività e consegne che favorissero la generazione di processi argomentativi sul perché una costruzione produce un certo risultato (procedure e teoria), seguite da momenti collettivi il cui scopo era capire le costruzioni altrui, confrontando una varietà di possibili costruzioni, spingendo gli insegnanti ad esplicitare e condividere con i colleghi i processi e le procedure che avevano generato le loro costruzioni.

Inizialmente sono stati messi in luce gli schemi d'uso del compasso (trasporto di misura e traccia di circonferenze), poi è stato dato il seguente compito:

> Costruire un triangolo isoscele utilizzando riga e compasso.

Questa scelta è stata fatta per diverse motivazioni: è una figura geometrica la cui definizione e le cui proprietà sono note fin dai primi anni di scuola e, inoltre, sono possibili diverse strategie per la sua costruzione. La consegna è volutamente lasciata aperta (non si dice: *costruire un triangolo isoscele, dati i lati*) perché, così facendo, è più probabile la genesi di strategie diverse di costruzione. Nella progettazione dell'attività abbiamo individuato quattro possibili strategie di costruzione (Fig. 3).

Le prime due strategie (A e B) sono state, com'era prevedibile, le più utilizzate perché parte delle pratiche solitamente usate a scuola. Gli insegnanti spesso hanno detto "*questa è la costruzione che conosco*" oppure "*i ragazzi studiano questa in tecnica*" o ancora "*di solito con i fogli quadrettati si fa l'asse*". Le altre due costruzioni (C e D) sono state meno frequenti perché si basano rispettivamente sulle proprietà di una figura diversa dal triangolo isoscele, la circonferenza, e sulla costruzione di angoli congruenti con riga e compasso.

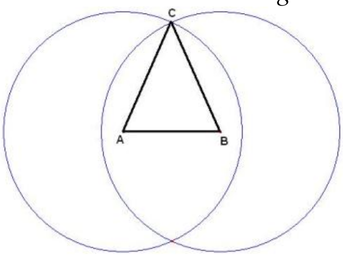
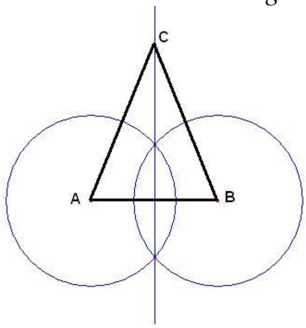
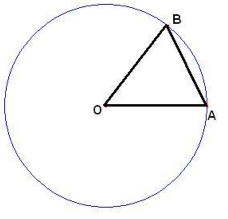
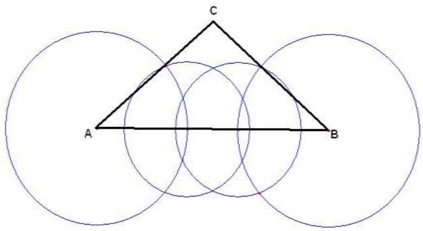
Tipo A *Particolarizzazione della costruzione generale di un triangolo dati tre lati, nel caso in cui due lati siano uguali.* 	Tipo B *Costruzione del triangolo isoscele usando la costruzione dell'asse del segmento.* 
Tipo C *Costruzione del triangolo isoscele sfruttando la congruenza dei raggi di una circonferenza per individuare i due lati congruenti del triangolo.* 	Tipo D *Costruzione del triangolo isoscele usando la costruzione di due angoli congruenti che hanno un lato in comune.* 

Figura 3: Costruzioni con riga e compasso del triangolo isoscele

Il confronto tra queste diverse strategie è avvenuto attraverso una discussione collettiva per focalizzare l'attenzione degli insegnanti su come lo stesso prodotto finale (il triangolo isoscele) potesse avere origini e percorsi di costruzione diversi, facendo emergere anche l'importanza dell'analisi delle motivazioni delle scelte (conoscenze teoriche, pratiche, ecc.) e del ruolo dello strumento in questo processo. In particolare è stato oggetto di discussione il fatto che partendo dalla stessa proprietà si hanno costruzioni diverse e quindi processi diversi: ad esempio, la costruzione che sfrutta i raggi di una circonferenza (C) e la costruzione di un triangolo dati due lati congruenti (A) partono dalla stessa proprietà del triangolo isoscele (avere due lati uguali), ma seguono percorsi di costruzione diversi. Queste costruzioni sfruttano anche schemi d'uso diversi dello strumento: nel primo caso, il compasso è usato per generare un luogo di punti la cui proprietà è utilizzata per individuare triangoli isosceli (basta scegliere due punti a caso sulla circonferenza, unirli con il centro e tra loro con segmenti); nel secondo caso si sceglie la lunghezza di due segmenti e si usa il compasso per trasportarne la misura. Naturalmente si sono discusse anche le costruzioni che partono da proprietà diverse del triangolo isoscele, analizzando come si ottengono costruzioni diverse; nello specifico la costruzione B sfrutta la presenza di una asse di simmetria e la D il fatto che il triangolo isoscele ha due angoli uguali.

Si riportano due brevi estratti della discussione avvenuta durante questa sessione di laboratorio fra docenti e formatore (Martignone, 2011):

Formatore: Chi mi vuole spiegare la costruzione? Passo per passo, così la posso riprodurre alla lavagna.

Insegnante A: Io sono stato pigro, ho disegnato solo un cerchio con raggio a piacere, poi ho unito il centro del cerchio con due punti appartenenti alla circonferenza.

Il formatore esegue questa procedura alla lavagna (Fig. 4)

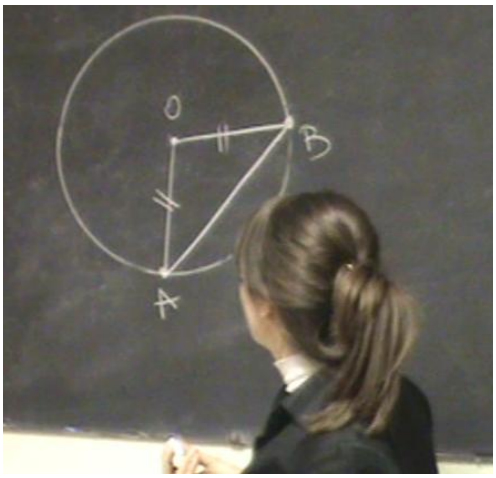


Figura 4 - Soluzione A

Ins. A: Ho scelto l'inclinazione e ho costruito il triangolo.

Form.: Okay, prima mi hai detto la procedura e ora come possiamo giustificarla? La procedura è corretta, io costruisco un triangolo isoscele. So che è proprio un triangolo isoscele perché …

Ins. A: Perché i punti che ho scelto sono sulla circonferenza.

Ins. B: Si, sono raggi della circonferenza, quindi sono uguali.

Ins. A: Ma … mi sto chiedendo una cosa, io prima ho detto a piacere..., ma forse dovevo stare più attento.

Ins. C: Non devono essere opposti.

Ins. D: Non devono appartenere al diametro.

Form.: Questo è un passo in più, chiedersi se...

Ins. A: Allora forse, per essere più precisi, avrei dovuto dire che escludevo i punti opposti.

Form.: Sì, non devo prendere B allineato con O e A. L'esplorazione del caso limite è importante. Se avessimo un software di geometria dinamica l'esplorazione sarebbe più facile.

Riportiamo ora un secondo estratto da una discussione nel quale un insegnante descrive una costruzione diversa dalla precedente e il docente formatore la esegue alla lavagna.

Ins. E: Ho disegnato un segmento, poi ho aperto il compasso a piacere e ho fatto una circonferenza puntando sui due estremi del segmento.

Ins. F: Ma con la stessa apertura.

Ins. E: Sì, con la stessa apertura.

Il formatore apre il compasso di un'ampiezza minore della metà del segmento, pensato come base del triangolo, e disegna le due circonferenze mentre nella classe comincia un mormorio.

Ins. E: No, non in quel modo!

Form.: Ma tu mi hai detto 'a piacere'.

Ins. E: Più largo.

Voci di insegnanti: Più della metà.

Form.: D'accordo, perché? Dobbiamo chiederci quello che abbiamo detto prima: la mia costruzione parte da una definizione o proprietà del triangolo isoscele. Quale proprietà vorresti usare?

Ins. E: Volevo usare la proprietà dell'asse del segmento.

Si apre una piccola discussione tra gli insegnanti sulle proprietà dell'altezza del triangolo che è anche asse del segmento di base e bisettrice dell'angolo opposto. Si ritorna quindi alla costruzione.

Form.: Allora per costruire l'asse di un segmento cosa devo fare? Devo trovare il luogo dei punti del piano che hanno la proprietà di essere alla stessa distanza dagli estremi del segmento: come posso fare con il compasso? Traccio due circonferenze con centro A e B aventi lo stesso raggio, i due punti di intersezione hanno la proprietà di essere equidistanti da A e B. La procedura era corretta, solo che il raggio non poteva essere scelto a piacere. Per far emergere questo aspetto ho scelto una apertura del compasso non corretta.

Ins. F: Quando insegniamo diciamo direttamente "più della metà", ma spesso non lasciamo il tempo agli studenti di pensare a come e perché essi usano il compasso.

Ins. E: Dovremmo mettere in luce il caso: la somma di due lati è minore del terzo.

La discussione continua analizzando altre costruzioni (Fig. 5 e 6).

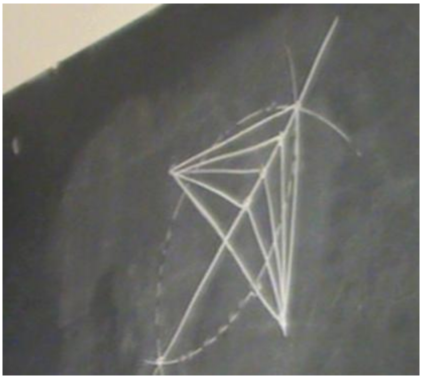


Figura 5 - Soluzione B

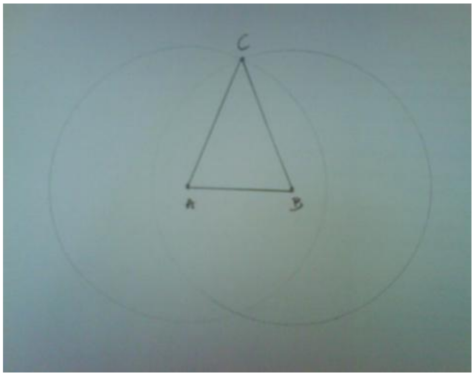


Figura 6 - Soluzione C

Il formatore nota che nessuno usa la proprietà del triangolo isoscele: *avere due angoli uguali*, e allora propone questa consegna:

Costruire un triangolo isoscele con uno degli angoli uguali dato (Fig. 7).

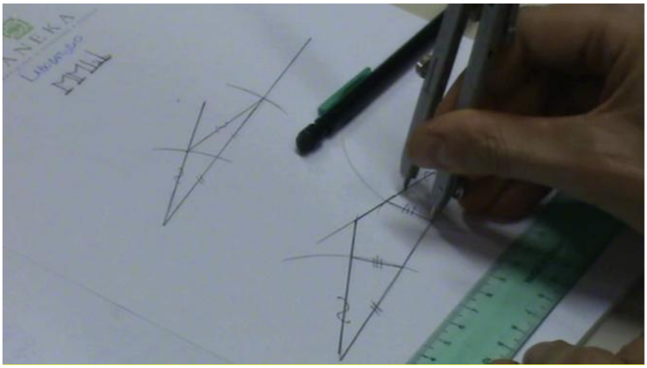


Figura 7 - Soluzione D

La consegna si configura come una sfida perché gli insegnanti non ricordano la procedura e si trovano 'costretti' a confrontarsi con il loro piccolo gruppo. Le discussioni che si sviluppano nei gruppi sono interessanti perché tutti vedono e ascoltano le costruzioni dei colleghi, facendo domande o focalizzando aspetti diversi della costruzione in relazione ai concetti matematici coinvolti e al ruolo del compasso.

Tutta l'attività sul triangolo isoscele evidenzia come anche nel caso di una semplice costruzione si possa utilizzare la metodologia laboratoriale al fine di sviluppare l'analisi e il confronto di soluzioni diverse sottolineando l'importanza della verbalizzazione e della giustificazione delle scelte compiute (conoscenze teoriche, procedure, ecc.).

Come si può vedere da questo breve esempio, il formatore orchestra la discussione ponendo domande, evidenziando limiti e peculiarità delle costruzioni suggerite, facendo emergere idee e riassumendo i punti principali della discussione. Questa attività porta gli insegnanti a riflettere sulle costruzioni prodotte, sui casi limite, sulle radici matematiche delle costruzioni proposte e sulle argomentazioni che le giustificano.

Dal punto di vista della conoscenza matematica gli insegnanti realizzano che anche partendo dalla stessa definizione di triangolo isoscele (un triangolo che ha due lati uguali) ci possono essere costruzioni, processi cognitivi e schemi di utilizzo del compasso differenti (per esempio le soluzioni A e C).

La discussione finale mette in luce che le costruzioni più frequenti sono la B e la C; pochissimi utilizzano la costruzione A e nessuno la soluzione D. Nella riflessione successiva, gli insegnanti concludono che le prime due strategie (B e C) sono più frequenti perché utilizzate sia in Tecnologia, sia quando hai a disposizione un foglio quadrettato. La costruzione D è rara perché poco utilizzata a scuola. Queste osservazioni saranno poi utilizzate dai docenti per pianificare le loro sperimentazioni e per l'analisi a priori delle consegne da proporre agli studenti.

Durante il corso si è fatto lo sforzo di rendere espliciti molti degli aspetti, che spesso rimangono impliciti, relativi alle motivazioni delle scelte e ai processi coinvolti. Tutto questo è stato poi reinvestito nelle sperimentazioni in classe, nelle quali è stato dato largo spazio a discussioni collettive sui diversi processi risolutivi prodotti dagli studenti.

Dopo l'attività sul triangolo isoscele, sono stati affrontati altri compiti di costruzione, tra cui quello di "*costruire due rette parallele fra loro*", mantenendo sempre la stessa metodologia di confronto. Altri compiti sono stati, invece, generati dalla discussione tra i docenti. Un insegnante, ad esempio, aveva osservato che:

> Prolungando i lati del triangolo isoscele costruito nella circonferenza [costruzione C] si ottengono le diagonali di un rettangolo. Quindi posso costruire le due rette parallele.

Questa osservazione ha portato alla progettazione di una consegna da utilizzare con altri gruppi di insegnanti:

> Di seguito sono riportate due costruzioni geometriche (svolte con riga e compasso) che rappresentano il primo passo (A) e l'ultimo passo (B) di un elaborato di uno studente a cui era stato richiesto di costruire due rette parallele.

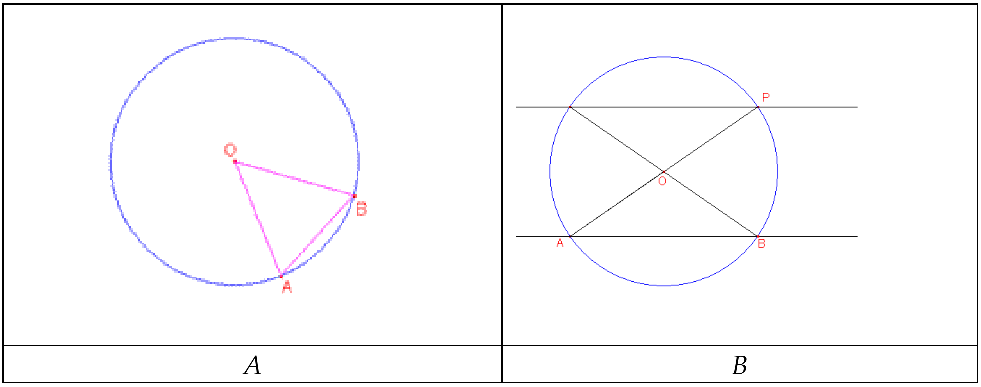


Figura 8 – Consegna per i docenti

> Qual è il legame tra la prima e la seconda figura? Perché le due rette costruite in B sono parallele? Provare ad applicare la costruzione precedente per risolvere il seguente problema: data una retta r ed un punto P esterno ad essa, costruire la retta parallela ad r passante per P. Spiegare i passaggi effettuati.

La richiesta propone una situazione (un'ipotetica costruzione di uno studente) in cui sono presenti il primo passo (elemento generatore) e il prodotto finale. Qui il processo non è esplicitato e gli insegnanti devono cercare di ipotizzarlo (domanda 1), trovarne le giustificazioni (domanda 2) e infine (domanda 3) usare il procedimento individuato adattandolo ad un altro compito.

Le attività descritte e la metodologia utilizzata hanno lo scopo di sviluppare negli insegnanti una forte attenzione e consapevolezza sui processi degli studenti e di sensibilizzarli sulle potenzialità dell'analisi dei processi sia quando analizzano gli elaborati dei ragazzi, sia quando progettano attività da svolgere in classe. Lo sviluppo di questo tipo di sensibilità e attenzione ai processi non è solo utile agli insegnanti per capire meglio le risoluzioni dei propri studenti (le peculiarità nei loro ragionamenti e possibili errori o misconcezioni), ma fa emergere caratteristiche importanti del ‘fare matematica’ che non sono ridotte alla sola manipolazione di simboli e alla riproduzione di dimostrazioni lette sui libri.

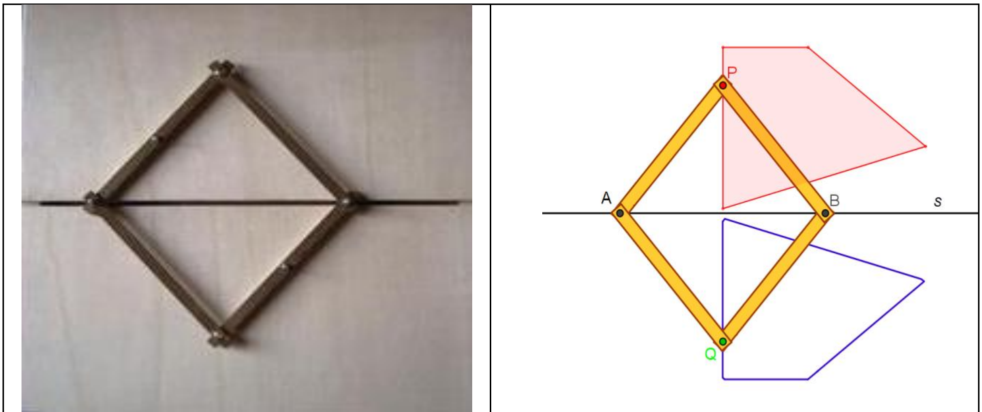
8.4.2. Congetturare e argomentare: esplorazione del pantografo per la simmetria assiale e del pantografo per lo stiramento

Consegna per i docenti:

Come è fatta la macchina? Cosa fa? Perché lo fa?

Queste tre domande hanno il compito di guidare e strutturare lo sviluppo dei processi di esplorazione, di produzione di ipotesi argomentate e di costruzione di dimostrazioni.

Il primo incontro con macchine matematiche non ‘consuete’ è stato con il pantografo per la simmetria assiale.



Il pantografo è formato da un rombo articolato AQBP i cui vertici A e B sono vincolati a muoversi su una scanalatura *s* mentre gli altri due vertici, P e Q, hanno due gradi di libertà.
La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni limitate di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a *s*. Per le proprietà del rombo e per come questo è incernierato al piano (una delle diagonali giace sulla scanalatura *s*), i punti P e Q si corrispondono in una simmetria assiale (in cui l’asse è la scanalatura *s*). Quando P percorre una traiettoria assegnata, Q descrive la traiettoria simmetrica.

Figura 9 - Il pantografo per la simmetria assiale

Gli insegnanti sono stati divisi in piccoli gruppi di gradi scolari differenti, a cui è stato dato un pantografo da esplorare seguendo le tre domande della consegna.

Come è fatta la macchina? L'esplorazione della macchina si gioca spesso su due livelli interconnessi fra loro: aspetti fisici e aspetti geometrici. Non vi è nessun problema per gli insegnanti a identificare le componenti fisiche della macchina: quattro aste rigide, uguali fra loro, due punti fissi che si muovono lungo una scanalatura e due punti liberi che si muovono nel piano. Questa descrizione è spesso accompagnata da osservazioni del tipo: "*le aste formano un rombo*" e la scanalatura è riconosciuta come diagonale del rombo. In questa prima fase si costruisce un linguaggio comune: vincoli, gradi di libertà, configurazioni limite, ecc.

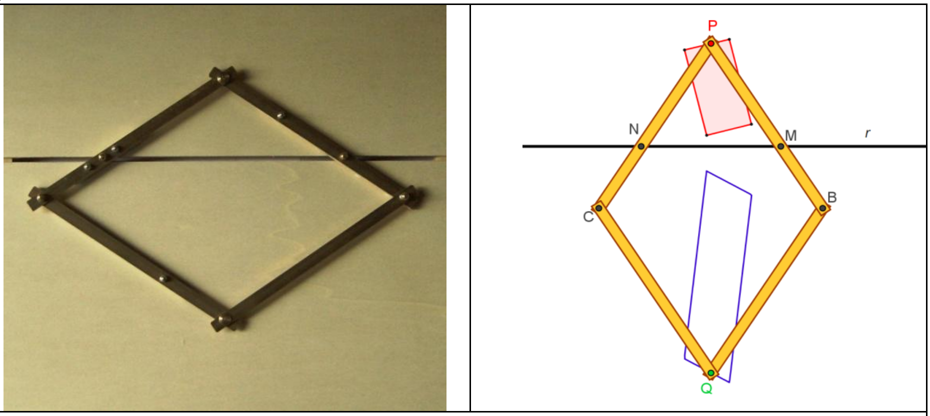
Cosa fa la macchina? Nella fase di produzione della congettura entra in gioco la relazione tra i punti tracciatori[45]: "*se si muove P, si muove anche Q*" oppure "*se P va verso l'alto Q va verso il basso e gli altri due vertici si avvicinano alla scanalatura*". In questa fase è importante che gli insegnanti stiano al gioco dell'esplorazione per mettersi nella stessa situazione dei ragazzi. Le osservazioni sul movimento del puntatore e del tracciatore sono infatti quelle che in genere gli studenti investono nelle giustificazioni delle congetture prodotte. È anche importante, per una prima esplorazione dello strumento, lasciare il tempo per acquisire quelle abilità manuali che consentono di disegnare figure con i pantografi. I docenti, come i ragazzi, diventano presto abili in questa tecnica e i tempi delle esplorazioni nelle macchine successive si riducono di molto. Inoltre è in questa fase che vengono affinate dagli insegnanti quelle abilità specifiche relative alla scelta delle figure da disegnare; tale scelta è anche orientata ai processi da attivare in classe e per questo si usano figure simmetriche e altre che non lo sono.

Perché lo fa? La fase argomentativa è legata alla struttura del sistema articolato (caratteristiche geometriche del rombo). In questo caso la cosa importante è cogliere che per i ragazzi la soluzione potrebbe non essere così scontata, ad esempio se gli studenti non hanno conoscenze pregresse sulla simmetria assiale oppure se non riescono ad investire nella giu-

[45] Nei pantografi per le trasformazioni geometriche del piano c'è un foro in ognuno dei due punti che si corrispondono nella trasformazione in cui possono essere inserite delle mine scriventi; per questo sono chiamati tracciatori. Secondo l'azione svolta, questi punti assumono ruoli diversi: ad esempio si distingue tra puntatore e tracciatore quando il primo guida l'azione, ricalcando o generando una figura nuova, e il secondo ne crea la trasformata. I ruoli di puntatore e tracciatore sono interscambiabili.

stificazione le proprietà del rombo che conoscono. Nelle sperimentazioni osserviamo, infatti, che le argomentazioni degli studenti sono strettamente legate alla fase esplorativa precedente e di nuovo aspetti geometrici e dinamici sono interconnessi: "*se sposto il puntatore si sposta anche il tracciatore, ma mantengono sempre la stessa distanza dalla retta s*" e ancora "*perché il rombo ha un asse di simmetria che corrisponde alla diagonale che poi è la scanalatura della macchina*". Sono spesso le stesse argomentazioni che portano i docenti, salvo poi spostarsi velocemente verso le proprietà matematiche della figura del sistema articolato. È importante che i docenti colgano le relazioni fra le due fasi: esplorativa e argomentativa senza avere fretta di arrivare ad una dimostrazione rigorosa. In questo caso è il processo che interessa, più che il prodotto matematico.

La seconda macchina analizzata, seguendo un ideale percorso didattico con la prima, è stata il pantografo per lo stiramento (Delunay) (Fig. 10).



Il pantografo è formato da un rombo articolato BPCQ i cui punti M e N (appartenenti rispettivamente ai lati BP, PC e scelti in modo che sia PM = PN) sono vincolati a scorrere entro la scanalatura rettilinea *r*, mentre i vertici P e Q hanno due gradi di libertà.
La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni limitate di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a *s*. Sfruttando le caratteristiche del rombo e come questo sia incernierato ad *r* (la scanalatura è parallela ad una diagonale del rombo), si dimostra che a retta PQ si mantiene (durante la deformazione del sistema) perpendicolare a *r*, e che risulta sempre costante il rapporto k delle distanze di P e di Q da *r* (k = (2PB-PM)/PM). Quindi le regioni piane (limitate), descritte da P e da Q nei semipiani opposti aventi *r* come origine comune, si corrispondono in quella particolare affinità che viene chiamata stiramento. Quando P percorre una figura assegnata, Q descrive la sua trasformata secondo uno stiramento di rapporto k.

Figura 10 - Pantografo per lo stiramento (Delunay)

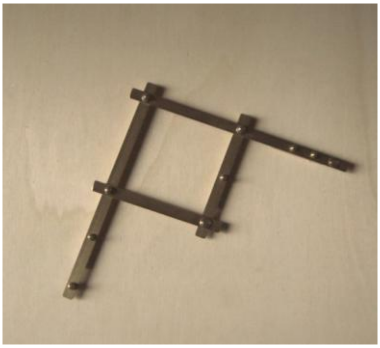
La figura geometrica del sistema articolato è la stessa (un rombo) e la trasformazione che si ottiene non è più un'isometria, ma uno stiramento. Pur seguendo il percorso precedente (*Come è fatta? Cosa fa? Perché lo fa?*) l'analisi è stata più veloce in quanto i docenti si erano già appropriati degli schemi esplorativi (movimento, individuazione di punti fissi, vincoli, configurazioni limite, ecc.) e di alcuni schemi d'uso. Per questo pantografo l'esplorazione e la fase di produzione della congettura è avvenuta per confronto con il pantografo per la simmetria assiale. In questo caso la scelta delle figure da disegnare con la macchina, rispetto alle quali gli insegnanti acquisiscono una competenza importante per la gestione del percorso in classe, ha seguito certi schemi. Si sono disegnate prima figure con elementi paralleli e perpendicolari alla scanalatura, poi con solo elementi o paralleli o perpendicolari e infine figure con nessuno di questi elementi. La dimostrazione non ha comportato nessuna difficoltà per i docenti.

8.4.3. Dimostrare: il pantografo di Scheiner

Il pantografo di Scheiner, spesso identificato come 'il pantografo', è uno strumento usato, nella storia e ancora oggi, come strumento per disegnare o incidere figure in proporzione. Per questi suoi diversi usi nel quotidiano, il pantografo di Scheiner si presta a diversi approcci che hanno suggerito percorsi didattici in cui questo strumento è stato esplorato per essere riprodotto, oppure per favorire la concettualizzazione della trasformazione in esso incorporata (omotetia) e per incoraggiare la dimostrazione del perché la struttura della macchina garantisca la realizzazione dell'omotetia.

In questo esempio focalizziamo la nostra attenzione sulla parte dedicata alla costruzione della dimostrazione e al confronto fra le dimostrazioni prodotte. In questo caso gli insegnanti hanno lavorato prima individualmente nell'elaborazione della dimostrazione, poi in piccoli gruppi o a coppie per il confronto di dimostrazioni che infine sono state presentate e discusse collettivamente.

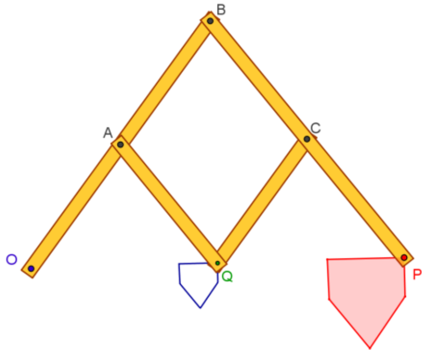
La produzione della congettura non è difficile per gli insegnanti che riconoscono nel prodotto della macchina un ingrandimento (o un rimpicciolimento). Durante la prima fase di esplorazione essi analizzano gli elementi che costituiscono la struttura della macchina: "*le aste rimangono* *parallele durante i movimenti*", "*la lunghezza di alcune aste è uguale*", "*le aste formano un rombo*". Inoltre vengono evidenziate figure ottenute completando parti della struttura (elementi aggiuntivi): "*si riconoscono due triangoli uguali*" oppure "*unendo i punti tracciatori con il punto fisso si ottiene una retta*". Questi argomenti diventano cruciali per la successiva costruzione della dimostrazione.



Il pantografo è costituito da quattro aste rigide incernierate nei punti A, B, C e Q scelti in modo da formare un parallelogramma (in questo caso un rombo). Il punto O è fissato al piano su cui il meccanismo si muove. Il punto P, sull'asta BC, è scelto in modo tale che risulti BP/BC = OB/OA = k (nell'esempio K = 2):
Per come sono incernierate le aste, i punti O, Q e P rimangono allineati durante la deformazione del sistema e risulta sempre OP = k·OQ (visto che i triangoli OBP e OAQ sono simili). Quindi Q e P si corrispondono in una omotetia di centro O. Considerando P come corrispondente di Q avremo il rapporto di omotetia k = OP/OQ>1. Se, invece, si considera Q corrispondente di P, avremo come rapporto di omotetia 1/k = OQ/OP<1

Figura 11 - Il pantografo di Scheiner

Per dimostrare che il pantografo di Scheiner può tracciare figure omotetiche, è necessario dimostrare che durante i movimenti del sistema articolato i punti tracciatori rimangono allineati e ad una distanza proporzionale da un punto fisso. La dimostrazione dell'allineamento dei punti può prendere strade diverse. Chi individua nella struttura della macchina due triangoli congruenti e un rombo sfrutta il fatto che "*la somma degli angoli è un angolo piatto*" (dimostrazione B), invece, chi individua la similitudine tra il triangolo formato dalle aste lunghe e il triangolo più piccolo (dimostrazione A) utilizza "*l'uguaglianza degli angoli corrispondenti*". Riportiamo (Fig. 12) due dimostrazioni prodotte dai docenti, esemplificative dei due diversi percorsi dimostrativi.



A	B
Per come è stato costruito il pantografo, il triangolo OBP è simile al triangolo OAQ: infatti le aste sono incernierate in modo da formare un rombo (AB = AQ = QC = CB) e A e C sono incernierati nei punti medi rispettivamente di OB e BP. In tutte le configurazioni possibili del sistema articolato quindi i punti O, P e Q rimangono allineati, visto che l'angolo BOQ è congruente all'angolo BOP (angoli corrispondenti di triangoli simili) e il rapporto tra OQ e OP è costante (dato dal rapporto di similitudine dei triangoli di cui questi segmenti sono lati corrispondenti).	Il pantografo è formato da quattro aste a due a due uguali e di lunghezza una il doppio dell'altra, collegate in modo che le due aste più corte siano incernierate alle più lunghe nel punto medio di queste. Si formano così due triangoli isosceli OAQ e QCP che sono congruenti per il primo criterio di congruenza: OA = AQ = QC = CP (per come sono state scelte le lunghezze delle aste) e gli angoli OAQ e QCP sono congruenti (AQ è parallelo a BP e OB è parallelo a CQ, essendo AQCB un rombo). Per questo OQ rimarrà sempre congruente a PQ e quindi il rapporto tra OP e OQ sarà sempre costante. Inoltre O, P e Q sono allineati perché OQA + AQC + PQC è un angolo piatto congruente alla somma degli angoli interni del triangolo OAQ: infatti OQA = CQP (perché angoli alla base di triangoli isosceli congruenti) e AQC = QAO (alterni interni di rette parallele tagliate da una trasversale).

Figura 13 - Due dimostrazioni sul pantografo di Scheiner

Consegna per i docenti:

Confronta due dimostrazioni prodotte analizzando analogie e differenze.

La prima dimostrazione lavora sui triangoli simili OAQ e OBP ed è solitamente prodotta dagli insegnanti che nella fase di esplorazione avevano individuato la proporzionalità dei lati OA e OB determinando così triangoli isosceli simili (OAQ, OBP) visualizzati immaginando di completare la struttura della macchina con i segmenti che uniscono i punti O, Q e P. In questo caso quindi sembra che la visualizzazione di triangoli simili sia l'elemento propulsore della costruzione della dimostrazione. Nella seconda dimostrazione invece sembra che il cuore costitutivo della dimostrazione sia generato dall'individuazione delle diverse figure che si possono riconoscere nella struttura della macchina: ossia il rombo e i triangoli congruenti. Anche in questo caso tale dimostrazione è solitamente costruita da soggetti che nella fase di esplorazione della macchina hanno focalizzato la loro attenzione su come le aste sono state incernierate tra di loro e sulle diverse figure che le aste di lunghezza uguale compongono.

È stato importante per gli insegnanti provare direttamente come le attività con le macchine, per i loro aspetti dinamici e per il fatto che incorporano leggi matematiche, sembrano essere un ambiente particolarmente favorevole per la genesi e lo sviluppo dei processi argomentativi e dimostrativi e per la messa in luce dei legami tra questi (unità cognitiva)[46]. Nello specifico, nella fase di confronto si è analizzato come in entrambe le dimostrazioni si sfruttino le proprietà delle figure individuate nella fase esplorativa per creare le argomentazioni a supporto delle proprietà dell'omotetia incorporate nella macchina, producendo così nella fase dimostrativa catene di proposizioni diverse che raggiungono lo stesso risultato. Gli insegnanti in questo modo si sono resi conto sia della stretta connessione tra il processo di produzione di una congettura, la ricerca di argomenti giustificativi e la costruzione della dimostrazione, sia dell'importanza, da un punto di vista didattico, di tenere insieme processi argomentativi e dimostrativi.

[46] Questo processo viene descritto nel modo seguente: durante la produzione della congettura, l'alunno progressivamente perviene al suo enunciato attraverso un'intensa attività argomentativa che si intreccia in modo funzionale alla giustificazione della plausibilità delle scelte compiute. Nella fase successiva di dimostrazione dell'enunciato, l'alunno si collega a tale processo in modo coerente, organizzando in catena logica alcune delle giustificazioni prodotte durante la produzione dell'enunciato. (Garuti, 2003, p. 524).

Questa attività mette in luce come per la costruzione della dimostrazione l'acquisizione di elementi nella fase di esplorazione dello strumento è fondamentale, poiché focalizzare l'attenzione solo sui prodotti della macchina (vedere cosa fa, senza curarsi troppo di come è fatta) potrebbe diventare un possibile ostacolo alla costruzione della dimostrazione in quanto un'assente o superficiale analisi dell'artefatto e dello strumento farebbe mancare gli elementi di giustificazione della congettura.

8.4.4. Porsi e risolvere problemi: le variazioni dei pantografi

Consegna per i docenti:

Cosa succederebbe se per costruire una macchina simile a quella della simmetria assiale e dello stiramento invece di aste uguali avessimo a disposizione quattro aste uguali a due a due?

Questa consegna si configura come una situazione di risoluzione di un problema ed ha costituito una certa sfida per gli insegnanti. Il primo passo è stato quello di immaginare di modificare la struttura del pantografo per la simmetria assiale rispetto alla figura formata dalle aste del sistema articolato (rombo) mantenendo però come condizione la trasformazione geometrica (simmetria assiale) da disegnare.

In questa prima parte molti insegnanti hanno individuato il deltoide al posto del rombo come possibile variazione, posizionandolo con i lati diseguali opposti alla scanalatura.

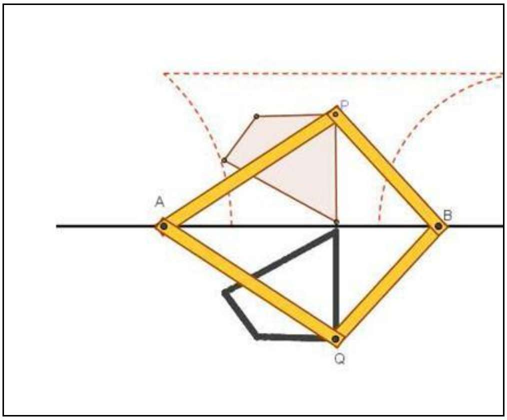
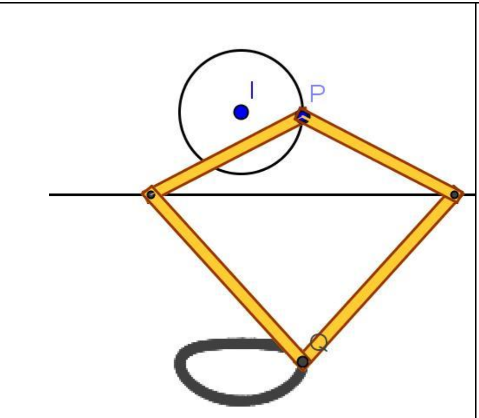
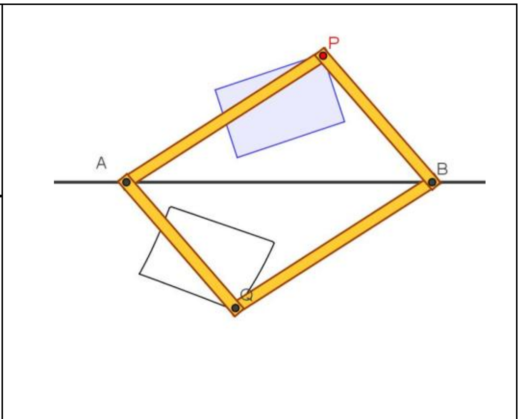


Figura 14 - Un pantografo per la simmetria assiale con il deltoide come struttura

È a questo punto che molti insegnanti si sono appassionati a queste possibili macchine 'modificate' chiedendosi non tanto se si manteneva la trasformazione, ma piuttosto se le variazioni della macchina avrebbero o no condotto a una qualche trasformazione conosciuta. Questa sfida, interessante anche per i formatori, ha portato alla costruzione, fisica e/o virtuale (attraverso simulazioni con software di geometria dinamica), di macchine matematiche 'nuove', per le quali non era assolutamente banale individuare il tipo di prodotto che si poteva ottenere. L'esperienza, immaginata e non fisicamente esperita, ha dato un forte impulso al coinvolgimento degli insegnanti tanto che nelle successive sperimentazioni in classe è stata riproposta spesso. Nella figura 15 riportiamo le variazioni apportate al pantografo mantenendo il quadrilatero come struttura articolata e il prodotto geometrico di tale variazione: nella prima la struttura del deltoide ha i lati uguali opposti alla scanalatura, nella seconda la struttura è rappresentata da un parallelogramma.



Deltoide 2: trasformazione non lineare



Parallelogramma: trasformazione non lineare

Figura 15 - Variazioni sul pantografo per la simmetria assiale

Per quanto riguarda il pantografo per lo stiramento la consegna *Cosa succederebbe se...?* si è giocata sia sulla modifica dei punti di inserimento della scanalatura che ne determinano il rapporto di stiramento, sia sulle variazioni del rombo, in modo analogo al pantografo precedente.

In generale, quasi sempre, la richiesta di variare le macchine studiate ha rappresentato una sfida per docenti e formatori, a volte con ipotesi fantasiose come nell'esempio sottostante, dove si è immaginato un sistema articolato formato da tre rombi articolati, collegati fra loro e fissati al piano in un punto O (Fig. 16). La difficoltà è quella di immaginare quale trasformazione una siffatta macchina può effettuare; questa macchina è stata costruita 'solo' virtualmente con l'ausilio di un software di geometria dinamica.

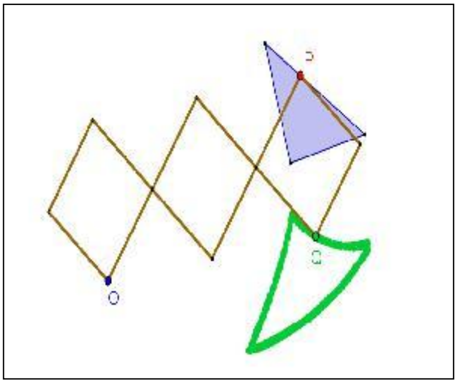


Figura 16 - La macchina 'virtuale'dei tre rombi

Il pantografo di Scheiner si è rivelato un utile terreno per la costruzione di attività di problem solving non banali nemmeno per gli insegnanti coinvolti nel corso. La prima fase di tipo esplorativo è avvenuta secondo lo schema delle quattro domande del punto precedente. L'attenzione dei docenti si è focalizzata sulla dimostrazione del perché la macchina produca un'omotetia (vedi punto 8.4.3). Il modello fisico che gli insegnanti avevano a disposizione (Fig.11) è costituito da due aste più lunghe di uguale lunghezza; le aste piccole sono incernierate esattamente nella metà delle aste lunghe. In questo modo il rapporto di omotetia risulta essere 1:2.

La prima attività di problem solving è stata quella di immaginare come modificare la macchina affinché il rapporto di omotetia fosse diverso, ad esempio 1:3. È interessante notare che a questo punto si osserva uno slittamento dell'esplorazione: essa non riguarda più direttamente la macchina matematica intesa come modello fisico, ma la sua struttura geometrica, essendo naturalmente impossibile modificare la macchina a disposizione. Pertanto gli insegnanti in questa fase hanno lavorato con carta e penna. Non è stato difficile intuire che per modificare il rapporto di omotetia basta cambiare il punto nel quale le aste corte sono incernierate secondo un rapporto stabilito a priori, mantenendo il parallelismo fra le aste e l'allineamento dei tre punti O, Q e P. Si osserva che la figura che si viene a formare all'interno del pantografo non è più un rombo, ma un parallelogramma. La stessa situazione può essere realizzata fornendo agli insegnanti quattro listelli di plastica di uguale lunghezza, alcuni ferma-campioni, come si vede nell'immagine di destra (Fig. 17).

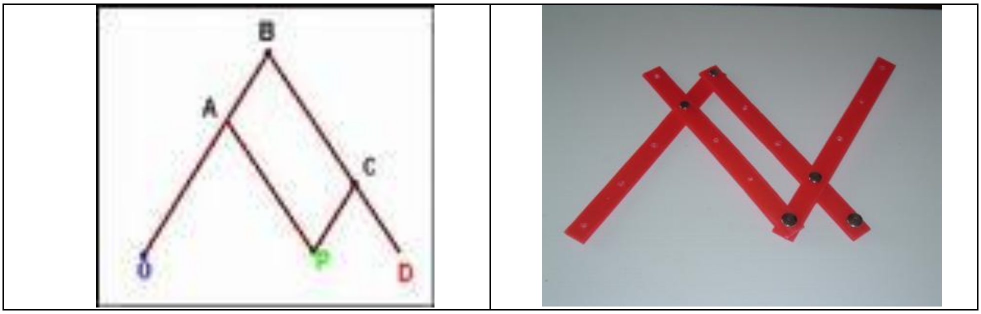


Figura 17 - Pantografo di Scheiner, con rapporto 1:3

Un po' più complessa l' attività nella quale si propone di costruire un pantografo di Scheiner a partire da un triangolo grande (OBD) non isoscele. In questo caso la misura non aiuta ed è necessario costruire con la squadra due rette parallele a due lati del triangolo e passanti per un punto che si trova sul segmento OD. È interessante osservare che le condizioni di parallelismo e allineamento dei punti OPD 'scoperte' durante la costruzione della dimostrazione del perché il pantografo di Scheiner realizza un'omotetia (vedi punto 8.4.3) vengono in questa attività utilizzati come strumenti (teorici) della nuova costruzione geometrica. Analogamente a prima è possibile utilizzare nell'attività listelli di plastica per la costruzione della struttura del 'nuovo' pantografo (Fig. 18).

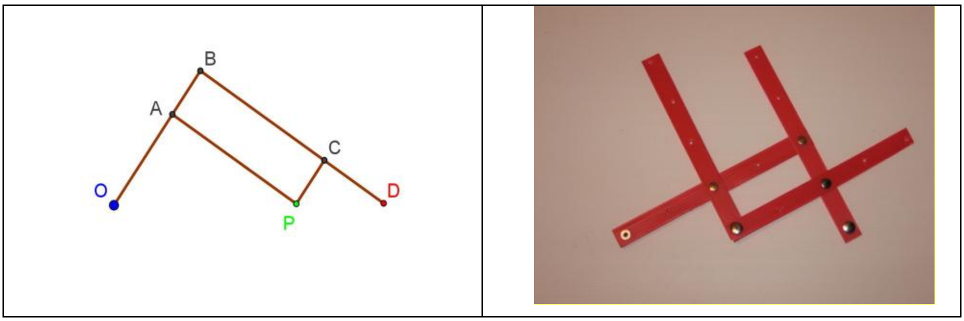


Figura 18 - Pantografo di Scheiner

Un altro esempio è rappresentato dalla presentazione di una struttura (come disegno o con listelli di plastica) del pantografo di Scheiner 'sbagliato'. La condizione omessa, come si vede in Fig. 19ricorda da vicino, è quella dell'allineamento dei tre punti (OPD), che è meno evidente rispetto all'eventuale omissione del parallelismo delle aste che compongono il pantografo. La richiesta diventa: *Perché questo pantografo non funziona? Come 'aggiustarlo' affinché realizzi un'omotetia?*

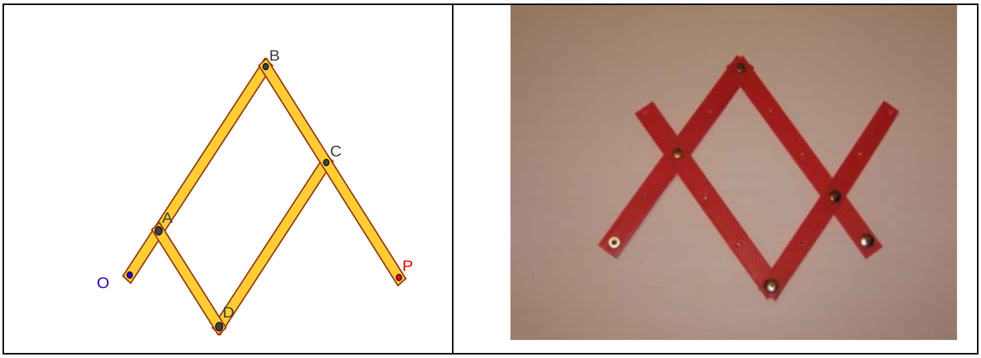


Figura 19 - Pantografo di Scheiner 'sbagliato'

Per rendere più scorrevole l'esposizione di quanto avvenuto durante la formazione degli insegnanti e per mettere in evidenza le diverse attività matematiche coinvolte abbiamo distinto le domande del punto 4.3 da quella del punto 4.4, ma nell'attività di esplorazione di tutte le macchine matematiche le quattro domande (*Come è fatta? Cosa fa? Perché lo fa? Cosa succederebbe se...?)* hanno sempre rappresentato una linea guida di esplorazione delle macchine matematiche oggetto del laboratorio con gli insegnanti.

Capitolo nono
Una riflessione sulle conoscenze matematiche per l'insegnamento

9.1. Un'integrazione al modello MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching*)

Il modello sulla conoscenza necessaria all'insegnamento (MKT) realizzato da Ball e colleghi (descritto nel capitolo sette) si è rivelato un utile strumento per interpretare e analizzare le attività di formazione nel progetto MMLab-ER poiché ha permesso di individuare di volta in volta quale aspetto della conoscenza veniva messo in luce. Per esempio nell'analisi con gli insegnanti in formazione di costruzioni geometriche prodotte da studenti o nell'analisi di discussioni di classe (vedi esempio paragrafo 8.3.1) il dominio riguarda la conoscenza relativa ai possibili comportamenti degli studenti, quindi *Knowledge of Content and Students* (KCS). La costruzione e discussione di percorsi didattici possibili o la scelta di abbinare fra loro l'esplorazione di macchine diverse per mettere in luce proprietà diverse delle trasformazioni geometriche collegate a strutture geometriche diverse delle macchine appartiene al dominio della conoscenza dei contenuti dell'insegnamento, *Knowledge of Content and Teaching* (KCT). Scegliere di confrontare il pantografo per la simmetria assiale, che realizza una trasformazione isometrica con il pantografo per lo stiramento dove la trasformazione non è isometrica, è un esempio evidente di questo tipo di conoscenza.

Ripensando all'attività svolta nel corso di formazione e in particolare agli elementi guida della formazione (interazione fra pari e con esperti, processi esplorativi e argomentativi, esplorazione guidata delle macchine e attività di problem solving) appare assai importante la nozione di conoscenza specialistica dell'insegnante (*Specialised Content Knowledge, SCK*) in quanto molte di queste attività si configurano come appartenenti a questo dominio di conoscenza.

Considerato che l'esperienza descritta riguardava l'analisi delle attività di formazione, un'attenzione particolare è stata data alla conoscenza specifica dell'insegnamento (*Specialised Content Knowledge*). Tuttavia, il modello di Ball e colleghi non tiene conto di aspetti importanti nella formazione degli insegnanti, come ad esempio l'analisi dei processi e l'analisi culturale dei contenuti. Abbiamo quindi sentito la necessità di specificare meglio questo dominio di conoscenza e cercato di stabilire relazioni fra questa e la parte pedagogica del modello, in particolare con gli aspetti relativi alla conoscenza degli studenti (*Knowledge of Content and Students, KCS*) e con le azioni che l'insegnante mette in campo nella sua attività didattica (*Knowledge of Content and Teaching, KCT*).

Nell'esperienza di formazione del Progetto MMLab-ER si osservano due aspetti significativi della conoscenza specialistica dell'insegnante.

Un aspetto è relativo all'analisi dei processi propri e altrui nelle attività di laboratorio di matematica (esempio sulle costruzioni con riga e compasso) che si può definire come *conoscenza specifica relativa all'analisi dei processi* (*SCKp*). Si tratta di una competenza non direttamente spendibile in classe in quanto i processi analizzati riguardano quelli propri dei docenti o dei colleghi, ma specifica di una professionalità docente, poiché ben difficilmente un matematico di professione o un comune cittadino potrà essere interessato a questi processi.

Un secondo aspetto è relativo all'esperienza di produzione di congetture, argomentazioni e dimostrazioni, direttamente vissuta dai docenti in formazione (vedi esempi sulle esplorazioni dei pantografi e sul confronto di dimostrazioni). Ciò ha consentito agli insegnanti momenti di riflessione sulla relazione tra congettura e dimostrazione e sulla sua significatività nell'educazione matematica e nella cultura matematica. Questo aspetto può essere definito come *conoscenza specifica relativa all'analisi culturale dei contenuti* (*SCKc*). Per fare un esempio, l'attività con i pantografi poteva essere orientata esclusivamente allo studio delle proprietà delle trasformazioni geometriche, peraltro strada che, dal gruppo di ricerca del MMLab di Modena, è stata, ed è, presente nelle visite al Laboratorio delle Macchine Matematiche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2008). Nelle attività di formazione del Progetto la scelta è stata diversa: la formazione è stata finalizzata allo sviluppo di processi di produzione di ipotesi, congetture e processi argomentativi, fino alla costruzione di dimostrazioni come esempi paradigmatici per gli insegnanti.

Trattandosi di una attività di formazione che coinvolge insegnanti in servizio e direttamente orientata verso la sperimentazione in classe, questa articolazione della nozione di SCK (*Specialised content knowledge*) che si colloca nell'ambito della conoscenza della matematica (*Subject Matter knowledge*) è direttamente collegata al versante pedagogico del modello di Ball e colleghi (PCK).

Possiamo osservare che l'analisi dei processi che si sviluppano in fase di formazione (*SCKp*) fornisce elementi fondamentali per la comprensione dei processi messi in atto dagli studenti durante le attività con le macchine matematiche. Ad esempio, come si vede negli esempi descritti, fornisce elementi di attenzione circa la contaminazione fra aspetti dinamici e aspetti geometrici nell'esplorazione della macchina, oppure elementi di riflessione circa il rapporto fra congettura e dimostrazione utili per comprendere i processi messi in atto dagli allievi. Inoltre l'analisi culturale dei contenuti in gioco (*SCKc*) nelle attività con le macchine matematiche (congetturare, argomentare e dimostrare) fornisce elementi agli insegnanti per organizzare le attività didattiche in relazione sia alla scelta dei contenuti matematici da affrontare, sia alla scelta delle consegne per gli studenti.

Lo schema sottostante (Fig. 1) rappresenta questa integrazione al modello della MKT di Ball e colleghi.

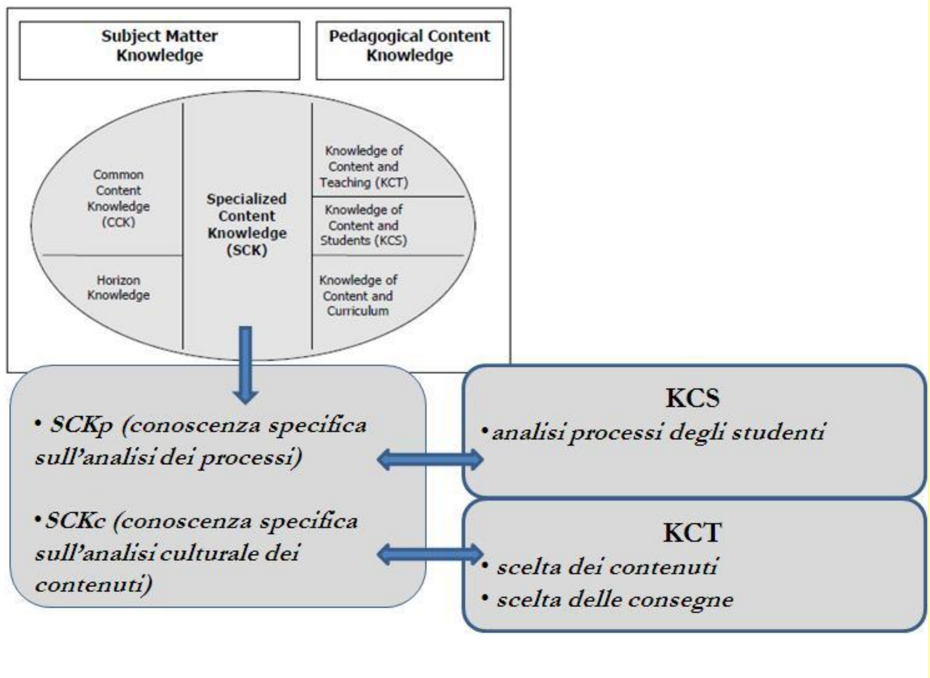


Figura 1 - Integrazione al modello della MKT

Questa evoluzione si deve alla riflessione di Boero & Guala (2008) sul ruolo dell'analisi culturale dei contenuti da insegnare (*Cultural Analysis of Content, CAC*) che abbiamo cercato di integrare nel modello di Ball e colleghi e che abbiamo ampiamente ritrovato nell'analisi della formazione del Progetto MMLab-ER.

Nel Progetto MMLab-ER gli aspetti culturali, storici e sociali della matematica sono fondamentali poiché le macchine matematiche del laboratorio non sono dispositivi didattici creati appositamente per l'introduzione di un determinato concetto, ma strumenti utilizzati nella storia della matematica con aspetti storico-epistemologici che si sono evoluti nel tempo e le attività realizzate intorno ad esse riguardano aspetti fondanti la matematica (congetturare e dimostrare). L'analisi culturale dei contenuti consente di:

> to connect knowledge and beliefs, awarenesses and sensitivities and assumptions and principles. (Mason, 2008, p. 310).

Nella riflessione sulle attività di formazione del Progetto è emerso che nella progettazione dei percorsi formativi i punti di attenzione individuati, definiti come elementi guida, sono in risonanza con l'analisi culturale dei contenuti secondo Boero & Guala (2008). Le consegne stesse proposte agli insegnanti vanno in questa direzione, ad esempio l' esplicitazione e il confronto di processi di costruzione geometrica; l' esplicitazione delle radici matematiche di una certa costruzione geometrica; il confronto di soluzioni di problemi matematici; l'esplicitazione e il confronto di congetture e argomentazioni sul funzionamento delle macchine matematiche. Il quadro teorico della MKT di Ball e colleghi è stato utile per riconoscere e interpretare quello che è avvenuto nelle attività di formazione con gli insegnanti, ma è tuttavia stato necessario rivederlo alla luce dell'analisi culturale dei contenuti in gioco per tener conto del particolare tipo di attività svolto con i docenti e delle finalità della formazione nel Progetto.

9.2. Una riflessione sulle consegne per gli insegnanti in formazione (*tasks for teachers*)

L'analisi dei rapporti fra consegne (*tasks*) e lezioni di classe (*lessons*) (Watson & Sullivan, 2008), descritta nel paragrafo 7.2, è utile per individuare alcuni elementi significativi e ricorrenti nelle consegne che sono state predisposte per gli insegnanti del Progetto. Per quanto riguarda il legame con le *lessons* questo era implicito nel 'contratto' stabilito con gli insegnanti, dal momento che erano tutti insegnanti in servizio e che si erano impegnati a realizzare in classe sperimentazioni con le macchine matematiche secondo una didattica laboratoriale. Essendo insegnanti di ordini diversi (primaria, secondaria di I e II grado) e di differenti indirizzi (Istruzione Professionale, Istruzione Tecnica e Licei), la formazione non era orientata direttamente alla costruzione di 'lezioni di classe', ma è naturale che ogni insegnante abbia cercato di trasformare le conoscenze costruite nell'attività di formazione in attività didattiche adeguate alle classi nelle quali insegnava.

Molte delle consegne utilizzate nelle attività di formazione riguardano quello che Watson & Sullivan definiscono *adaptive reasoning*.

> Adaptive reasoning refers to the capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification, including the power of mathematics to provide its own verification methods. For students to develop this we need classroom tasks that have adaptive reasoning as the main focus, rather than answers, methods, fluency or memory. […] When the focus is on developing the skills mathematics inquiry, teachers typically are not interested so much in content knowledge or curriculum coverage, but in the development of being mathematical, a culture of mathematics, within the social world of classrooms. (Watson & Sullivan, 2008, p. 129).

La citazione ricorda da vicino le attività messe in atto nella formazione del Progetto in quanto queste non erano orientate a particolari contenuti matematici, ma a fondamentali attività matematiche. L'esplorazione dei pantografi, nell'esempio descritto, non ha come scopo principale la scoperta delle proprietà geometriche delle trasformazioni isometriche e non, ma la sua finalità è orientata alla produzione di congetture e argomentazioni utili per la costruzione di dimostrazioni. E le consegne proposte vanno in questa direzione: esempio tipico di consegne di questo tipo sono le quattro domande chiave che hanno guidato le esplorazioni delle macchine (*Come è fatta? Cosa fa? Perche? Cosa succederebbe se?).*

Le attività di problem solving poste agli insegnanti del corso invece sono guidate da consegne che Watson & Sullivan definirebbero del tipo *What if?*.

> The *What if?* template is useful for open-ended and mathematically focused investigative tasks. Such task can engage students in productive exploration, enhance motivations through increasing the students' sense of control and encourage pupils to investigate, make decisions, generalize, seek patterns and connections. The term "what if" is used to highlight the role of the teacher in prompting the dimensions of variations inherent in such tasks. (Watson & Sullivan, 2008, p. 130).

Per quanto riguarda il legame fra consegne (*tasks*) proposte agli insegnanti e lezioni in classe (*lessons*) si è osservato, come si vedrà meglio nella parte dedicata alle sperimentazioni, che si sono creati dei modelli di lezione (*templates*) che gli insegnanti hanno utilizzato nelle loro sperimentazioni di classe come nel caso della modalità esplorativa delle macchine (le quattro domande chiave) oppure del confronto di costruzioni geometriche aventi la stessa finalità (costruzione di una certa figura geometrica) ma radici (in questo caso proprietà geometriche) differenti.

Capitolo decimo
La voce degli insegnanti del Progetto MMLab-ER

10.1. La piattaforma come luogo virtuale di incontro

La piattaforma Moodle per le sedi di Bologna e Modena ha costituito sicuramente un valore aggiunto durante il corso di formazione e durante le sperimentazioni in classe. Nella formazione aveva lo scopo di tirare le fila delle attività svolte durante gli incontri attraverso la stesura di verbali dell'incontro, di proposte di schede o di soluzioni di problemi proposte dal docente formatore. Il forum, uno per ogni tipologia di macchina matematica analizzata (pascalina, compasso, pantografi e conicografi) era moderato da un docente tutor che aveva il compito di raccogliere il materiale e le osservazioni prodotte e di rispondere in tempo reale, per quanto possibile. In particolare nella prima fase di formazione i docenti attraverso la formazione si sono scambiati le soluzioni alle costruzioni geometriche proposte durante il corso in presenza. Un aspetto interessante della piattaforma è rappresentato dalla richiesta di stendere un resoconto dell'incontro di formazione, attraverso la modalità Wiki, secondo il seguente schema:

- analisi situata dell'incontro nella quale i docenti ripercorrono secondo la loro sensibilità l'incontro di formazione;
- analisi dei saperi che corrisponde ad una riflessione del docente su quelle che sono le conoscenze matematiche e pedagogiche oggetto dello specifico incontro di formazione.

Un esempio di analisi situata è rappresentato dalla citazione sotto riportata:

Analisi situata della giornata (secondo incontro)

La parola chiave che ha rappresentato la giornata odierna è stata la 'continuità':si è ripresa la presentazione del progetto regionale, sono proseguite le esercitazioni singole e di gruppo come il precedente incontro con simili modalità, in aggiunta è stato presentato il Laboratorio di Macchine Matematiche. Si è ripreso il lavoro di esercitazione singola, condivisione di gruppo (ristretto) e di 'classe' sulle 'schede-stimolo' proposte. […]

In merito al 'compito a casa' si sono esplorate le costruzioni diverse rispetto alla 'soluzione' della scheda stessa (rette parallele), mettendo in luce sia i diversi procedimenti, ma soprattutto i diversi 'saperi matematici' latenti alle diverse costruzioni, rilevando, tra l'altro, una certa difficoltà nel trasmettere oralmente la procedura; è stato necessario chiamare almeno in due occasioni il 'discente' alla 'lavagna' e si è concordato nel raccogliere in formato elettronico le diverse costruzioni (molti docenti infatti conoscono ed usano abitualmente "Cabrì Geometre" o "Geogebra"). La costruzione alla 'lavagna' non permetteva l'immediata validazione del procedimento (garantita o con una accurata costruzione geometrica o tramite l'utilizzo dei software dinamici di geometria sopra citati). Tra l'altro si trattava di lavagna a fogli bianchi e quindi era davvero difficile riuscire a rappresentare correttamente figure e dimensioni, forse con una lavagna quadrettata il problema della rappresentazione si sarebbe potuto affrontare meglio ( accolta sfida stimolo Wiki!!!)[47].

Come si può notare non si tratta di un semplice verbale dell'incontro, ma entrano in gioco le riflessioni dei docenti, le difficoltà incontrate e le modalità tecniche utilizzate nell'incontro.

Per quanto riguarda la riflessione sui saperi cioè quella che è stata chiamata "analisi dei saperi" (come perché lo abbiamo fatto), la riflessione si sposta su un terreno diverso. Non più resoconto ma riflessione sull'attività di formazione. Un esempio interessante è il seguente:

'Analisi dei saperi' della giornata

Penso si possano analizzare due forme di saperi diversi: il sapere matematico ed il sapere didattico.

Lascio, eventualmente, ai miei colleghi l'approfondimento dei 'saperi matematici' contenuti e sviluppati in questa seconda giornata per mettere in risalto i 'saperi didattici' che penso siano l'elemento portante del progetto e delle sue modalità di esecuzione.

Più che di 'saperi didattici' penso sia opportuno parlare di 'saperi metodologici o strategici' rivolti all'analisi della conduzione delle lezioni quindi alle scelte o 'azioni didattiche'.

L'approccio è ovviamente di astrazione cooperativa ove la tradizionale 'didattica' tipicamente 'insegnante-centrica' (per intenderci quella delle nostre programmazioni figlie di numerosi copia-incolla che teniamo gelosamente nel cassetto), lascia lo spazio alla 'costruzione collettiva dei significati' in un contesto progettuale più aperto, ma meno definito, tipicamente 'alunno-centrico' ove il baricentro della 'azione didattica' si sposta dall'insegnamento all'apprendimento.

Il mezzo (mediatore, Caronte verso il "sapere matematico") sono le macchine e l'apprendimento avviene 'facendo', anche se l'approccio secondo la "scuola progressiva" di John Dewey lo fa sembrare "empireo-centrico".

[47] *http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/mod/wiki/view.php?id = 26.*

Non dobbiamo dimenticare che noi siamo il Giano bifronte, studenti e docenti nello stesso tempo e queste attività ci inducono alla metariflessione, verso una profonda riflessione che rafforza l'insegnante metacognitivo (consapevole di quello che sa e quello che vuol fare) o, con una visione più pragmatica, noi siamo le macchine che inseguono i tratti del progetto di formazione regionale ed applicano la trasformata (più o meno distorta) nelle proprie classi.

Così come accade per le macchine il punto di partenza è "cosa facciamo", ma il punto di arrivo (o meglio il 'viaggio') è l'analisi di "come e perché lo facciamo".

Oltre ai momenti espositivi ove le informazioni sono trasmesse in modo unidirezionale, e il relatore confida nelle nostre capacità ricettive, la "lezione vera e propria" è costituita dalle attività proposte.

Nella fase iniziale vi è la pianificazione delle attività (si decidono le 'regole del gioco', i gruppi, la disposizione dei tavoli, i tempi,le consegne e le macchine), poi vi è la fase di esplorazione personale (studio, riflessione, ricerca, azione), seguita dalla condivisione nel gruppo ristretto (volutamente eterogeneo per creare interdipendenze positive grazie alla ricchezza delle diversità) e poi dalla conclusione dell'attività stessa che prevede, in sessione plenaria, la discussione, l'esposizione delle procedure, l'argomentazione ove si individuano gli elementi di interesse e i punti di criticità emersi dai gruppi ristretti. Il compito del docente-facilitatore diventa ora la valorizzazione dei singoli contributi e la convergenza verso la "condivisione dei significati" (visto in un processo di "costruzione sociale") e in genere verso la generalizzazione in modelli, principi e teorie.

Ma il 'nostro' corso è molto di più.

Il suo valore non è 'situato' nel laboratorio universitario o semplicemente 'trasferito' in classe, il nostro corso non ha confini spazio-temporali. Ci ritroviamo, nell'ottica della formazione continua, ad essere forse in futuro noi stessi 'formatori' o 'allestitori di mostre'; non solo, ci ritroviamo qui, proprio qui tra queste righe, in spazi virtuali, grazie alla piattaforma moodle messa a disposizione, nella 'continuità' di condividere, 'aggiustare', e costruire un disegno dinamico, che solo la lettura olistica può magnificare.

È l'una di notte, scusate le elucubrazioni, per il momento mi fermo qui (*http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/mod/wiki/view.php?id =26*).

Come si può notare dalla lunga citazione sopra riportata, la riflessione è a tutto campo e in questo caso si focalizza l'attenzione sui saperi 'didattici' in gioco in attività di formazione nel laboratorio di matematica con le macchine matematiche.

In altri casi il resoconto non è così esplicitamente suddiviso, ma all'interno di esso si può notare non solo un semplice ripercorrere le tappe dell'incontro di formazione, ma anche una riflessione su processi messi in atto per l'esplorazione delle macchine oggetto dell'incontro e una riflessione sugli aspetti didattici in gioco. Un esempio di questo fatto è il resoconto relativo all'esplorazione della macchina per la simmetria centrale (Fig. 1).

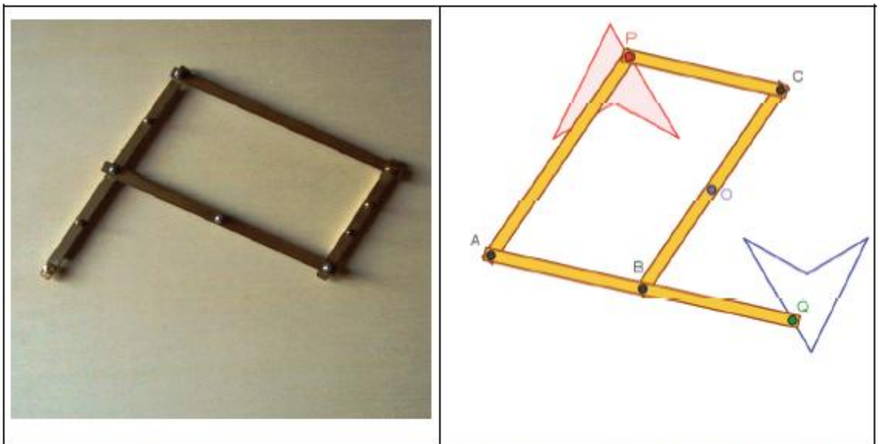


Figura 1 - Fotografia | *Figura 2 - Immagine di un'animazione virtuale*

Figura 1 - Il pantografo per la simmetria centrale

Vediamo il resoconto della discussione su questa macchina:

Spunto di notevole interesse è la discussione nata intorno alle proprietà geometriche del perno O. Sembra a tutti 'evidente' che O si trovi nel punto di incontro delle diagonali del parallelogrammo in tutte le diverse configurazioni della macchina. Alcuni gruppi sottolineano la necessità di passare dall'evidente al certo e avvertono l'esigenza di una dimostrazione. Dimostrare l' "evidente" è una delle caratteristiche tipiche della geometria che vuole superare l'apparenza percettiva con l'implicazione logica delle diverse proposizioni.

Basterebbe dimostrare l'allineamento dei punti P (puntatore), O e Q (tracciatore)… ma, come spesso accade, dimostrare l' "evidente" non è così semplice! Sono nate diverse proposte (fondamentalmente 4 più alcune varianti) per "dimostrare agli scettici" l'allineamento dei tre punti. Per dimostrare l'allineamento dei tre punti si è fatto ricorso a diversi criteri e teoremi noti, data la varietà di possibili approcci offerta dall'apparente semplicità della costruzione.

I corsisti che hanno proposto una propria dimostrazione dovranno formalizzarla e inviarla al forum; gli altri dovranno decidere quale di esse è risultata più ‘convincente’. Probabilmente tutti gli approcci erano fondamentalmente corretti, ma in alcuni casi sono apparsi oscuri o affrettati alcuni passaggi logici, o, semplicemente, alcune dimostrazioni sono risultate meno ‘pulite’, meno rigorose o meno eleganti di altre.

A nostro parere, questa esperienza può fare riflettere sia sul valore ‘estetico’ oltreché formale di una dimostrazione, sia sugli schemi mentali di ognuno di noi, portato a seguire con maggiore facilità un tipo di argomentazione piuttosto che un'altra, e quindi a reputarla maggiormente efficace. *(http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/mod/wiki/view.php?id= 49).*

Come si può vedere da questo estratto, il resoconto dell’incontro di formazione è inframmezzato da riflessioni sull’attività matematica (il senso della dimostrazione, confronto fra empirico e teorico, necessità di passare dall’evidente al certo in matematica) esperita nell’incontro e da riflessioni didattiche come si evince dall’estratto sotto riportato:

Prima di passare alla macchina successiva i docenti sottolineano l’importanza della comunicazione alunno-alunno e alunni-docenti durante tutte le fasi di lavoro e l’efficacia della discussione in classe sul lavoro svolto precedentemente (quindi l’importanza della documentazione delle varie attività) per fare emergere in maniera *spontanea* i vari saperi degli scolari. *(http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/mod/wiki/view.php?id=49).*

10.2. Le griglie di progettazione

Un altro strumento utilizzato dai docenti, nella seconda annualità, durante il corso di formazione è rappresentato dalle griglie di progettazione delle sperimentazioni. Tali griglie avevano lo scopo di favorire da parte dei docenti l’analisi a priori delle attività sperimentali da proporre alle classi. In particolare si voleva non solo che emergessero gli obiettivi specifici della sperimentazione, le macchine utilizzate, l’ipotesi di percorso didattico, ma anche, in accordo con l’analisi dei processi cognitivi e la riflessione sull’attività matematica in gioco (argomentare, congetturare e dimostrare) avviata durante il corso di formazione, gli insegnanti ipotizzassero i nodi cruciali e le difficoltà che andavano a proporre alle loro classi. Questo poteva, inoltre, essere un elemento utile di confronto fra docenti di ordine scolastico diverso che però utilizzavano la stessa macchina matematica. Nell’esempio sotto si riportano due estratti dalle griglie di progettazione di un gruppo di docenti (Buonomo, Ferretti e Postal) di scuola secondaria di primo grado (Scuola media Galilei) e di una docente (Micelli) di scuola secondaria di secondo grado (Istituto per geometri). Entrambe le progettazioni riguardano le attività con il compasso.

Analisi didattica (o analisi a priori)

Pre-requisiti degli studenti: concetti di parallelismo e perpendicolarità, concetto di angolo, confronto di segmenti con l'uso del compasso.
Quali sono le caratteristiche e le peculiarità dello strumento che vogliono essere sfruttate per raggiungere un certo obiettivo pedagogico: possibilità di traslare la squadra sulla riga; possibilità di usare il compasso per il trasporto di misure, per disegnare circonferenze, confrontare lunghezze di segmenti e ampiezze di angoli.
Possibili difficoltà/problemi: per la maggioranza degli alunni della scuola secondaria di I grado, l'utilizzo della riga e del compasso risulta speso problematico. Difficoltà nella produzione di descrizioni scritte del lavoro svolto. (Buonomo, Ferretti, Postal[48]).

Analisi didattica (o analisi a priori)

Pre-requisiti degli studenti: definizioni, assiomi, teoremi, criteri di congruenza dei triangoli, circonferenza, concetto di luogo geometrico
Caratteristiche e peculiarità dello strumento: il compasso, una macchina matematica per tracciare circonferenze di centro e raggio dati, un ponte di comunicazione tra due discipline curricolari, la matematica e il disegno geometrico.
Possibili difficoltà/problemi: la tendenza nota di diversi studenti a considerare le costruzioni geometriche come date dall'alto, la loro correttezza è garantita dal docente (Disegno, Matematica, Tecnologia) e non dalle proprietà delle figure utilizzate nelle costruzioni. Di conseguenza la difficoltà di portare a termine il percorso di 'libera e autonoma' utilizzazione delle conoscenze geometriche in ambito applicativo col rischio di far prevalere la funzione strumentale della geometria euclidea a scapito della sua funzione culturale. (Micelli[49]).

In questi due esempi il ruolo giocato dalla macchina e i prerequisiti richiesti sono diversi poiché l'attività si è svolta in classi di ordine scolastico diverso. Tuttavia si può osservare che le difficoltà ipotizzate dagli insegnanti sono molto simili: il nodo in entrambe le sperimentazioni è

48 *http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/mod/resource/view.php?id=118&subdir=/progetti_riga_e_compasso*

49 *http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/mod/resource/view.php?id=118&subdir=/progetti_riga_e_compasso*

rappresentato dagli aspetti relativi all'approccio al sapere teorico. Per la scuola secondaria di primo grado la difficoltà ad argomentare le costruzioni prodotte, per la scuola secondaria di secondo grado più specificatamente l'approccio al sapere teorico in gioco, ad esempio quali proprietà geometriche si usano nelle costruzioni geometriche con il compasso.

È importante sottolineare che tutte le sperimentazioni dei docenti, di Modena e Bologna, erano disponibili per un confronto sulla piattaforma, mentre per il gruppo di Faenza la documentazione delle sperimentazioni è stata raccolte in formato cartaceo dal tutor locale del progetto.

Capitolo undicesimo
Una sperimentazione pilota

Nella primavera del 2009 sono stata invitata da una scuola secondaria di primo grado della provincia di Taranto, la scuola media "A. Chionna" di Lizzano, a tenere due laboratori pomeridiani per studenti della scuola. Le attività laboratoriali erano all'interno dei progetti PON-Fondi strutturali della Comunità Europea[50], organizzati dalla scuola. La richiesta era quella di organizzare e gestire due laboratori di 15 ore ciascuno in orario pomeridiano sul Laboratorio di Matematica. Mi è parsa un'occasione ghiotta per sperimentare direttamente, in prima persona, alcuni dei percorsi didattici previsti nel progetto MMLab-ER. I due laboratori e i materiali predisposti potevano essere un utile esempio per le sperimentazioni che nei mesi successivi sarebbero state avviate dai docenti coinvolti nel Progetto regionale. I percorsi organizzati in questa classe hanno riguardato macchine aritmetiche (la Pascalina) e macchine geometriche (i pantografi). L'esperimento didattico che si descrive ha coinvolto 28 alunni di classe prima. L'attività è durata due settimane, a distanza di un mese l'una dall'altra, 3 ore ogni giorno, di pomeriggio, in un percorso programmato di potenziamento delle attività didattiche.

11.1. La progettazione delle sperimentazioni

Le due sperimentazioni sono state condotte all'interno del quadro teorico della mediazione semiotica d'origine vygosktiana e sviluppato da Bartolini Bussi e Mariotti (2008). In entrambi i casi si sono introdotti nella classe artefatti della storia della matematica (Pascalina e pantografi per le trasformazioni geometriche nel piano) e la metodologia adottata è

50 *http://www.progettoponscuola.it/che_cosa_sono_i_pon.htm*. Sono strumenti finanziari gestiti dalla Commissione europea per realizzare la coesione economica e sociale di tutte le regioni dell'Unione e ridurre il divario tra quelle più avanzate e quelle in ritardo di sviluppo. Questi fondi sono erogati alle scuole dal Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca sulla base di due Programmi Operativi Nazionali ideati per sostenere l'innovazione e la qualità del sistema scolastico in quattro Regioni del Sud Italia (Calabria, Campania, Puglia e Sicilia, le sole appartenenti all'Ob. Convergenza) e colmare il divario con le altre aree territoriali del Paese e dell'Unione Europea.

stata quella relativa alla didattica laboratoriale. Come descritto nel quadro teorico della mediazione semiotica:

> Quando un artefatto è introdotto in una classe con lo scopo preciso di costruire certi significati matematici, si possono identificare due tipi di legami: il primo legame è stabilito tra l'artefatto e il compito dato, mentre il secondo legame è definito tra l'artefatto e una parte del sapere. In questo senso si può parlare di polisemia dell'artefatto. Lo sviluppo parallelo di diversi sistemi semiotici (gesti, disegni, linguaggio orale e scritto) favorisce l'interiorizzazione della polisemia; questo processo è condotto dall'insegnante a partire dalle caratteristiche fisiche dell'artefatto. Questi sistemi semiotici permettono agli allievi di costruire il significato degli oggetti matematici in un progetto che inizia con un'attività di esplorazione della macchina e termina con un modello matematico. (Ferri, 2007, p. 27).

Un altro elemento importante nella progettazione delle sperimentazioni riguarda il passaggio da artefatto a strumento (Rabardel, 1995). Secondo la terminologia di Rabardel un *artefatto* è un oggetto materiale con caratteristiche fisiche e strutturali proprie, realizzato per perseguire scopi specifici incorporando conoscenze, risultato di un'evoluzione culturale, mentre lo *strumento* è definito come "*l'artefatto* unito alle modalità del suo uso, così come sono viste e interpretate da un utente in base alla sua cultura e alla sua esperienza". In modo più schematico possiamo dire che uno *strumento* è formato da due componenti:

a) un *artefatto*, materiale o simbolico, prodotto dal soggetto o da altri;

b) uno o più *schemi d'uso* associati, risultanti da una costruzione propria del soggetto, autonomi o dipendenti da schemi sociali d'uso già precedentemente formati.

Pertanto la pratica didattica del laboratorio di matematica dovrà favorire un'evoluzione degli *schemi d'uso* dello strumento da parte degli studenti e dei significati associati ad essi (in relazione al compito che viene affrontato). Questi due elementi (mediazione semiotica e approccio strumentale) hanno informato la progettazione delle esperienze e la costruzione delle consegne per gli studenti come si mostrerà nei paragrafi successivi. Tutte la macchine matematiche utilizzate nelle attività di laboratorio sono state esplorate secondo il seguente schema:

Come è fatto? (Artefatto)
Cosa fa? (Strumento)
Perché? (Significati matematici)
Cosa succederebbe se…? (Risoluzione di problemi).

11.2. La sperimentazione con la Pascalina

La prima sperimentazione riguarda una macchina aritmetica: la Pascalina. La scelta di questo artefatto per la prima sperimentazione è dovuta alla riflessione che in prima media gli studenti hanno, o dovrebbero avere, una certa dimestichezza con gli algoritmi e le proprietà delle quattro operazioni in N. Per gli studenti di questo ordine di scuola l'insieme dei numeri naturali e gli algoritmi di calcolo delle quattro operazioni costituiscono un campo di esperienza[51] interno alla matematica consolidatosi nel corso della scuola primaria. L'ipotesi di ricerca è che l'attività di laboratorio con una macchina aritmetica come la Pascalina consenta una riflessione sugli algoritmi di calcolo e sulle proprietà delle quattro operazioni in N e che favorisca processi argomentativi in ambito numerico.

11.2.1 La macchina (Zero+1) e la macchina di Pascal

L'artefatto utilizzato in questa attività didattica è la macchina ZERO+1 (Fig. 1) prodotta dalla ditta Quercetti[52], che si ispira alle calcolatrici meccaniche costruite nella prima metà del Seicento da Schickard e da Pascal. È costruito in plastica robusta e le sue dimensioni sono 27 cm x 16 cm.

Figura 1-La macchina Zero+1

Su una base sono disposte cinque ruote: due nella parte superiore (E e D) e tre nella parte inferiore (A, B, C), disposte su tre diversi livelli. Le

[52] *http://www.quercetti.com/ita/index.php*

due ruote superiori sono strutturali, nel senso che permettono il movimento degli ingranaggi, mentre le tre ruote inferiori sono funzionali, legate alla rappresentazione dei numeri. Sottili stanghette sono inserite sulle ruote D ed E: la stanghetta inserita in D interagisce con la ruota B e quella posizionata sulla ruota E con la ruota C. Il ruolo che svolgono queste stanghette è essenziale: consentono di automatizzare il cambio ('riporti' e 'prestiti'), che è il grande vantaggio di questa macchina aritmetica, in accordo con quanto riportato da Pascal. Le ruote A, B e C rappresentano rispettivamente unità, decine e centinaia (qualora la virgola, di cui la macchina è fornita, resti posizionata nel foro predisposto a destra). Spostando la virgola da destra verso sinistra è infatti possibile veder rappresentati: decine, unità e decimi oppure unità, decimi e centesimi. Nella parte inferiore dello strumento tre piccoli triangoli rossi indicano le cifre che devono essere considerate tra quelle riportate sui dieci denti di ciascuna delle tre ruote C, D e E per la scrittura e lettura dei numeri.

La macchina Zero+1 è un artefatto di grande 'visibilità', nel senso che non ci sono parti meccaniche nascoste: tutte le componenti dell'artefatto sono ben osservabili. Inoltre mettendo in funzione lo strumento è possibile:

- osservare la rotazione delle ruote ingranate e l'interazione di una delle levette quando avviene nelle ruote A e B il passaggio da 0 a 1;
- percepire una rotazione che non è continua: c'è una lieve resistenza ogni volta che una ruota avanza di un dente e occorre una spinta leggermente più forte quando avviene il cambio;
- sentire un 'click' più intenso, quando le levette entrano in azione soprattutto quando si muovono tre ruote contemporaneamente (ciò avviene, ad esempio, per passare da 99 a 100).

La macchina Zero+1 incorpora in modo evidente la rappresentazione posizionale del numero in base dieci: mostra sulle sue ruote le cifre coerenti con tale sistema, permette di rappresentare numerali in base dieci e di calcolare automatizzando il cambio. Meno evidenti sono invece altri saperi matematici relativi alle operazioni che permette di svolgere[53].

[53]*http://reggioscuola.it/primaria-sanbartolomeo/files/2010-09Zero_1_CaliniFerriMaschietto1.pdf*

Le calcolatrici meccaniche si diffusero in Europa a partire dal XVII secolo, quando era ormai noto (anche se non sempre utilizzato nella pratica) il sistema di notazione posizionale. Blaise

Blaise Pascal (1623-1662), matematico, fisico, filosofo e teologo, mise a punto una macchina da calcolo, l'antenato delle attuali calcolatrici, che eseguiva addizioni e sottrazioni utilizzando una serie di ruote dentate analoghe a quelle utilizzate negli orologi dell'epoca La Pascalina, così è stata soprannominata la macchina da calcolo di Pascal, è stata una delle prime macchine da calcolo in grado di effettuare addizioni e sottrazioni con il riporto automatico delle unità. Suo padre, Étienne Pascal, era intendente di finanza a Rouen, in Normandia, incarico che lo costringeva a frequenti e lunghi calcoli. Il figlio, allora solo diciannovenne, ma già brillante matematico, pensò di aiutarlo costruendo per lui uno strumento che alleviasse la noiosa incombenza. L'ingegno di Pascal produsse quella macchina che oggi viene ricordata con il nome di Pascalina, un addizionatore a ruote. Dopo vari tentativi e la ricerca di un abile artigiano che la costruisse, nel 1645 riuscì a presentare la sua invenzione a Pierre Seguire, cancelliere di Richelieu, ottenendone apprezzamento e l'incoraggiamento a migliorarla. Nel 1649 il Re Sole, Luigi XIV, concesse a Pascal il 'privilegio' che gli garantiva l'esclusiva di unico produttore e diffusore commerciale. Pascal pubblicizzò la sua invenzione in tutta Europa, grazie alla corrispondenza con molti sapienti dell'epoca.

La parte forse più innovativa della Pascalina era il suo meccanismo di riporto, che permetteva una certa affidabilità, anche quando si doveva propagare su più ruote successive, come nella somma 9999 + 1. Il meccanismo ideato impediva però la reversibilità del movimento e la sottrazione poteva essere eseguita solo ricorrendo al trucco della "somma con il complemento". Con l'aiuto di un orologiaio di Rouen, Pascal produsse Pascaline di varie dimensioni, forse una cinquantina, comprese versioni non decimali per il calcolo di pesi e valute. Alcuni esemplari furono donati ad importanti personaggi europei (Fig. 2), come la regina Cristina di Svezia e Maria-Luisa Gonzaga, regina di Polonia. Tramite il fisico olandese Christian Huygens, un modello raggiunse Londra, dove fu presentato alla Royal Society, ottenendo lodi anche da Robert Hooke, che era inizialmente piuttosto scettico. La prima descrizione della Pascalina pubblicata a stampa apparve nel 1652 sul periodico Muse Historique. Nel 1650 Pascal fu colto da una crisi religiosa che portò a termine il suo interesse per la fisica e la matematica, quindi anche per la sua 'creatura' meccanica. La Pascalina lasciò una durevole eredità tecnologica; macchine sostanzialmente simili, anche se decisamente più perfezionate, soprattutto nel meccanismo del riporto, continueranno ad essere costruite fino agli anni '60 del secolo scorso. Già agli inizi del Settecento due copie della Pascalina furono costruite anche nella lontana Cina. Solo nove esemplari originali della Pascalina sopravvivono oggi in musei e collezioni private.

Figura 2 - Pascalina (tavola dell'Encyclopédie di Diderot e d'Alembert, dettaglio)

La Pascalina funziona con un sistema di ruote sulla cui circonferenza sono incise le cifre da zero a nove; le ruote (cinque, nei primi modelli, otto, negli ultimi modelli) rappresentano le unità, le decine, le centinaia e così via. La loro rotazione rende automatica l'operazione dei riporti. Allo stesso modo del meccanismo di un orologio, osservò Pascal, quando si svolge un calcolo e si arriva alla decina, si può pensare a una ruota dentata delle unità che venga azzerata, mentre la ruota delle decine fa uno scatto. Dalle decine alle centinaia si può utilizzare un meccanismo simile, come per tutte le unità successive. La Pascalina e le successive addizionatrici meccaniche sono quasi tutte basate su un dispositivo di conteggio che effettua l'operazione di riporto mediante particolari ingranaggi; quando la prima ruota (quella delle unità) completa un giro, fa scattare di un'unità quella contigua delle decine e così via. L'"addizionatore di Pascal" è uno strumento facile da trasportare, lungo 36 cm, largo 13 cm e alto 8 cm (Fig. 3).

Figura 3 - Il lato superiore della Pascalina con le ruote usate dall'operatore per introdurre i numeri e le aperture in cui compariva il risultato

All'interno delle finestrelle è possibile vedere dei tamburi con la cifra risultante. Ogni tamburo ha due righe di numeri: la riga nera viene utilizzata con le addizioni, quella rossa per le sottrazioni. Ogni volta che si fa un'addizione, una stecca orizzontale copre la fila rossa mentre un'altra stecca si preoccupa di coprire quella nera quando si opera una sottrazione. Davanti ad ogni finestrella ci sono dei meccanismi che aiutano ad inserire il numero che si desidera elaborare. Questi meccanismi sembrano delle ruote sul bordo delle quali sono incise le cifre. La prima delle 8 ruote aveva 12 scatti, la seconda 20 e le altre sei 10. Se qualcuno voleva utilizzare la Pascalina per effettuare dei calcoli con il sistema decimale era costretto ad utilizzare solo le ultime 6 ruote. Infatti la Pascalina inventata appositamente da Pascal per il proprio padre, esattore delle tasse, era concepita per addizionare facilmente monete ma anche frazioni di esse; le ruote da 12 e da 20 scatti erano infatti utilizzare per le frazioni di moneta (l*ivers*) denominati rispettivamente *derniers* e *sols*. Vennero costruite anche versioni della Pascalina che non includevano le due ruote con valori non decimali in versioni da 5, 6 e 8 cifre. In funzione del valore che doveva essere aggiunto le ruote dovevano essere ruotate di tante posizioni quante era il numero da inserire. Era questo lavoro di inserimento che causava la variazione della visualizzazione delle cifre del risultato che, alla fine delle operazioni, era corretto. L'addizione può essere fatta in modo abbastanza agevole. Per quanto la Pascalina fosse comoda per effettuare addizioni, richiedeva un procedimento più complicato per la sottrazione. Pascal aveva progettato i meccanismi per muoversi in una sola direzione. Questo significa che non era possibile eseguire la sottrazione semplicemente ruotando nella direzione opposta ma era necessaria una procedura di complemento a 10. Esisteva una via efficiente per svolgere anche le moltiplicazioni. Per quanto pionieristica fosse, la Pascalina non riusciva a svolgere in modo agevole e poco oneroso le operazioni di divisione. Queste operazioni erano comunque possibili ma dovevano essere svolte per mezzo di sottrazioni successive.

11.2.2. La matematica della Pascalina

Nella Pascalina si trova incorporato l'approccio ricorsivo del numero, formalizzato nell'assiomatica di Peano:

Con il lavoro sul concetto di numero (1891), Giuseppe Peano (1858-1932), rielaborando alcune idee introdotte da Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nello scritto *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), propose un'introduzione assiomatica dell'aritmetica basata su tre concetti primitivi (l'unità, che in una seconda stesura fu sostituita con lo zero; il numero; il successivo) e su sei assiomi (definitivamente enunciati nel 1898 in *Aritmetica*, la II parte del II volume del *Formulaire de mathematiques*: Peano, 1908, p. 27; Kennedy, 1983; Bagni, 1996a, p. 2).

Nel sistema assiomatico di Peano, si rinuncia a dire che cosa è un numero naturale assumendo alcuni concetti come primitivi: zero, numero naturale, successivo di un numero naturale. Nel lavoro di sistemazione della matematica Peano presentò una descrizione assiomatica dell'aritmetica scegliendo alcuni concetti aritmetici (detti concetti primitivi) tra tutti quelli a disposizione, senza darne una definizione esplicita. Tali concetti sono poi utilizzati per definire altri concetti. I tre concetti primitivi nella assiomatica di Peano sono: zero, numero naturale, successore di un numero naturale. Questi concetti devono soddisfare i seguenti assiomi scritti in forma discorsiva:

- Assioma zero. I numeri formano una classe.
- Assioma I. Lo zero è un numero.
- Assioma II. Se a è un numero, il suo successivo a+ è un numero.
- Assioma III. Se s è una classe contenente lo zero e, per ogni a, se a appartiene a s, il successivo a+ appartiene a s; allora ogni numero naturale è in s ("principio di induzione").
- Assioma IV. Se a e b sono due numeri e se i loro successivi a+, b+ sono uguali, allora a e b sono uguali.
- Assioma V. Se a è un numero, il suo successivo a+ non è zero. (Bagni, 1996a, p. 4).

Vediamo adesso come si sviluppa la teoria dei numeri naturali a partire da queste idee di Peano (per indicare il successore di un numero a, utilizzeremo lo stesso simbolo munito di apice).

✓ L'assioma zero, secondo il quale i numeri formano una classe, è importante perché inserisce il discorso nell'ambito delle classi (insiemi).

✓ L'assioma I garantisce che l'insieme dei numeri naturali ha almeno un elemento, lo zero, quindi N non è vuoto.

✓ L'assioma II assicura che anche O′, successore di O, appartiene ad N, chiamiamo 1 questo numero; inoltre lo stesso assioma garantisce che il successore di O è unico. Allo stesso modo, anche 1 ha un successore ed è $1' = 2$; anche 2 ha un successore ed è $2' = 3$ e così via. Appare evidente che con queste definizioni potremmo andare avanti quanto ci pare perché l'assioma II ci garantisce che ogni numero che aggiungiamo ha un successore; l'insieme N è quindi un insieme infinito.

✓ Inoltre, in virtù dell'assioma IV, possiamo essere sicuri che questi numeri sono tutti diversi, altrimenti avremmo due numeri disuguali che hanno lo stesso successore.

✓ L'assioma V garantisce che nessuno dei numeri che possiamo raggiungere con la successione è 0.

I primi quattro assiomi ci garantiscono quindi che la serie dei successori ci dà infiniti numeri, uno diverso dall'altro. A questo punto entra in gioco l'assioma III per il quale in questa serie ci sono tutti i numeri naturali; infatti essa contiene lo O, contiene il successore di O e il successore di qualsiasi numero in questo modo generato, quindi contiene ogni numero naturale.

Gli assiomi di Peano ci consentono di dare una definizione rigorosa della somma e del prodotto di due numeri naturali e di dare una dimostrazione di tutte quelle proprietà di cui godono queste operazioni.

Prendiamo in considerazione il caso dell'addizione (incorporato nella macchina Zero+1).

Questa operazione viene definita induttivamente in base alle condizioni iniziali:

$a + 0 = a$; $a + b' = (a + b)'$ cioè:

- la somma di un numero con 0 è il numero stesso;
- la somma di un numero a con il successore di un numero b è il successore del numero $a + b$.

Si tratta di dimostrare dapprima che se a e b sono numeri, anche $a + b$ è un numero. Peano prova ciò per induzione. Infatti: $a + 0 = a$ è un numero (per definizione); supponiamo che $a + b$ sia un numero. Consideriamo $a+(b+1)$.

a + (a + b) = (a + b)+1 (per definizione) ed (a + b) + 1 è un numero (per il postulato 2), quindi per il postulato tre, il teorema è provato.

La seconda delle relazioni poste: a + b′ = (a + b)′ dice che, per esempio 4 + 2′ = (4 + 2)′, cioè che 4 + 3 è uguale al successore di 4 + 2. In questo modo, per calcolare 4 + 3 ci riconduciamo via via a situazioni più semplici: 4 + 3 = (4 + 2)′ = ((4 + 1)′)′ = (((4 + 0)′)′)′ = (((4)′)′)′ = ((5)′)′ = (6)′ = 7.

La somma di due numeri naturali viene così definita mediante un meccanismo detto di ricorsione che rimanda la soluzione del problema ad un caso più semplice; questo a sua volta ad un caso più semplice e così via fino ad arrivare alla prima proposizione a + 0 = a; da qui si ricostruisce la sequenza determinando ogni volta il successivo del numero trovato. Si dice per questo che la definizione di somma è una definizione ricorsiva.

11.2.1 *Il percorso didattico sulla Pascalina*

La macchina Zero+1, prodotta dalla ditta Quercetti, è un artefatto costruito sull'idea della Pascalina originaria. Una differenza importante, rispetto alla Pascalina originale, è rappresentata dal fatto che il meccanismo è trasparente e che è possibile girare le ruote in entrambi i versi, orario e antiorario, rendendo così possibile anche l'operazione di sottrazione.

Il percorso didattico organizzato per questa classe prevedeva momenti diversi coerenti con le domande chiave individuate nella progettazione:

- l'analisi dell'artefatto (*Come è fatta la macchina?);*
- il passaggio da artefatto a strumento: individuazione degli schemi d'uso (*Cosa fa?);*
- una riflessione sulle proprietà delle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (*Perché lo fa?);*
- alcune situazioni di problem solving (*Cosa succede se…?)*;
- una verifica finale (*E se tu fossi…?*).

La sequenza delle attività svolte è stata la seguente[54]:

a) La Pascalina come artefatto: *disegna la macchina e spiega come funziona*.

b) Il passaggio da artefatto a strumento-ingranaggio: *come far muovere tutte le ruote contemporaneamente?*

[54] In appendice le schede per gli studenti.

c) L'addizione e la sottrazione: diversi schemi d'uso: *come funziona? Perché?*

d) Confronto di schemi d'uso per l'addizione e la sottrazione.

e) Un problema curioso: *calcola 8-3 = girando le ruote SOLO in senso orario*.

f) La moltiplicazione: diversi schemi d'uso Come funziona? Perché?

g) La divisione: diversi schemi d'uso. *Come funziona? Perché?*

h) Criteri di divisibilità con la Pascalina.

i) Una lettera storica: Blaise Pascal (1645): *Immagina di essere Pascal e scrivi una lettera al Granduca del tuo paese per illustrare la tua invenzione.*

11.2.4. L'analisi dell'artefatto (Come è fatto?)

Ai ragazzi viene data una macchina Zero+1 (d'ora in poi "Pascalina") con la seguente consegna "*Disegna e descrivi come è fatta la Pascalina senza farla 'girare*' (vedi scheda 1 in appendice). L'analisi dell'artefatto era guidata da alcune domande, in particolare alla fine si chiedeva di formulare un'ipotesi circa l'uso della Pascalina.

I disegni prodotti dai ragazzi, più che la descrizione, sono molto diversi fra loro e mettono in luce i loro punti di attenzione: alcuni disegnano numeri su tutte e cinque le ruote (Sadmir), sebbene i numeri siano presenti solo sulle ruote gialle, altri invece riproducono in modo abbastanza completo l'artefatto (Giacomo). (Fig. 4).

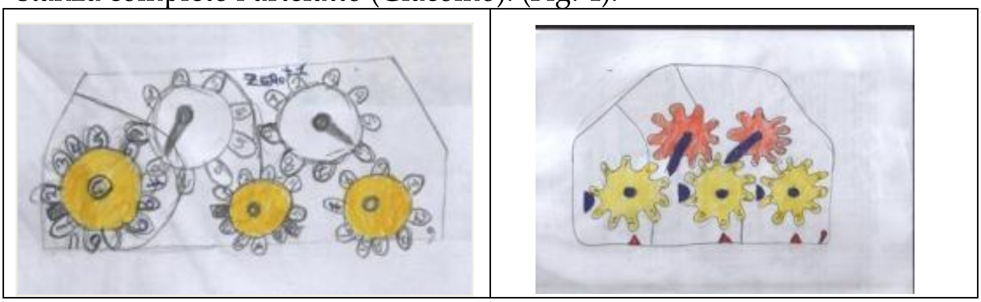


Figura 4 - I disegni di Sadmir e Giacomo

Anche le descrizioni sono molto diverse fra loro:

Sadmir: è formata da 5 ruote. Nella Pascalina ci sono 3 ruote gialle con i numeri e due ruote arancioni con le frecce, e anche una virgoletta. Le ruote sono collegate fra loro attraverso i denti. Secondo me la Pascalina serve a velocizzare le operazioni matematiche.

Giacomo: la macchina ha cinque ruote. Queste ruote sono diverse, le ruote E e D sono arancioni e hanno sopra un'asta. Le ruote A, B, C invece sono gialle con i numeri da 0 a 9. Le ruote sono collegate fra loro grazie a questo movimento: la ruota A fa muovere la D che con l'asta fa muovere la B poi la B fa muovere la E che con l'asta fa muovere la C. la Pascalina serve a fare calcoli. La A sono le unità, quando arriva a 0 scatta la decina cioè la ruota B, 9 decine fanno ruotare la ruota C cioè le centinaia.

Come si vede da questi due esempi per Sadmir la descrizione dell'artefatto è la descrizione di un oggetto non collegato a nessuna pratica didattica. L'ipotesi sull'uso è generica e probabilmente dovuta al fatto che l'attività si sta svolgendo nelle ore di matematica. Giacomo invece coglie perfettamente il legame fra ruote gialle e ruote arancioni (è l'asta che trasmette il movimento da una ruota gialla all'altra) e collega la Pascalina alla notazione posizionale dei numeri.

11.2.5. Dall'artefatto allo strumento ingranaggio

Per favorire negli allievi l'analisi dell'artefatto in movimento si propone la Scheda 2 nella quale si chiede di descrivere il funzionamento della macchina. La descrizione viene guidata dalla richiesta di ritagliare cinque cerchi e di attaccarli alla scheda in modo da modellizzare la macchina attraverso cerchi e frecce che ne indichino il movimento. Lo scopo di questa attività è quello di analizzare la Pascalina dal punto di vista del funzionamento dell'ingranaggio e soprattutto di individuare gesti e simboli adatti a descriverlo. (Fig.5).

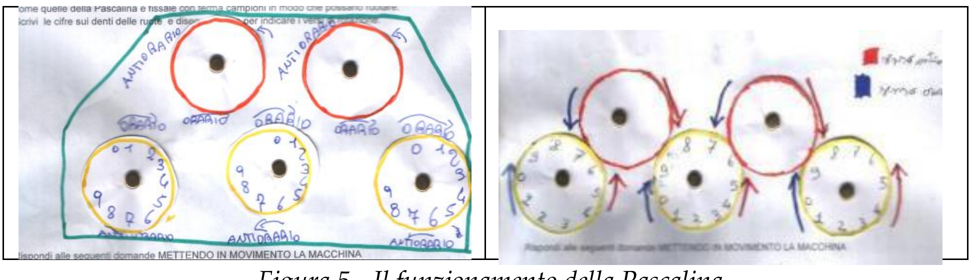


Figura 5 - Il funzionamento della Pascalina

Come si vede dall'immagine sopra riportata l'artefatto viene stilizzato nelle sue parti principali e il movimento descritto attraverso parole (orario e antiorario) e simboli (frecce).

Per tutti gli studenti l'artefatto che si trovano davanti è un ingranaggio e ne descrivono il movimento come tale, come mostra l'esempio sottostante:

> Quando la ruota in basso a destra arriva a 9 fa muovere la ruota arancione che a sua volta muove la seconda ruota gialla. Le ruote arancioni si muovono quando una gialla arriva a 9. Le ruote dentate gialle si possono muovere sia in senso orario che antiorario. Secondo me le ruote arancioni servono a far muovere le ruote gialle (Giacomo).

Tutta l'attenzione dei ragazzi è rivolta al movimento delle ruote e a come questo movimento si trasmette da una ruota all'altra. Gli stessi termini che i ragazzi usano "*fa un clic in su* [verso antiorario], *fa un clic in giù* [verso orario]" altro non sono che degli schemi d'uso che trasformano l'artefatto in strumento e per la precisione in un ingranaggio. Il fatto che sulle ruote gialle siano scritte le cifre sembra del tutto casuale.

È tanto forte la presenza dello strumento-ingranaggio che ai ragazzi viene spontaneo chiedersi: *come fare per far muovere tutte e cinque le ruote insieme?*

Questa domanda rappresenta una buona occasione per la produzione di congetture.

I ragazzi cominciano a provare sulla macchina per individuare il modo per far muovere tutto l'ingranaggio; la difficoltà è nell'individuare l'enunciato. Come si vede dai due esempi sotto riportati, la doppia natura della Pascalina (ingranaggio e strumento aritmetico) è presente contemporaneamente.

> Con *qualsiasi* numero che finisce per 00 facendo un clic dell'ultima ruota a destra in senso antiorario si muovono tutte e cinque le ruote.
>
> Con *tutti* i numeri che finiscono per 99, facendo un clic dell'ultima ruota a destra in senso orario si muovono tutte e cinque le ruote.

Nella discussione collettiva orchestrata intorno alla dimostrazione dei due enunciati si focalizza l'attenzione che nel caso della Pascalina, avendo un numero finito di ruote, per la dimostrazione è sufficiente analizzare tutti i casi possibili:

- per il primo enunciato: 000, 100, 200, 300, 400, 500 fino a 900;

- per il secondo enunciato 099, 199, 299, 399, 499, 599 fino a 999.

È un'occasione per tentare di generalizzare la congettura prodotta ad una macchina immaginaria con un numero di ruote *n.*

Ma nella generalizzazione sorge un problema: qual è la relazione fra il numero di ruote gialle e il numero di ruote arancioni? Se nella Pascalina ho 5 ruote di cui due sono quelle che trasmettono il movimento e 3 sono quelle che indicano le cifre del numero rappresentato, il numero di ruote della Pascalina immaginaria sarà dato dalla somma delle ruote arancioni e gialle. Se le gialle sono n allora le ruote arancioni saranno $n - 1$ e il totale delle ruote sarà $n + n - 1$ ossia $2n - 1$ quindi un numero dispari. Questa attività di produzione di congetture non era prevista nella progettazione ed è stata gestita in classe attraverso una discussione collettiva. È interessante notare che in questo caso si abbandona l'artefatto per ragionare sul numero di ruote di una situazione virtuale e della relazione fra numeri.

La generalizzazione delle congetture prodotte sulla Pascalina e relative al movimento di tutte le ruote presenti nell'ingranaggio è stata fatta utilizzando il linguaggio verbale, senza l'uso di linguaggio algebrico che avrebbe comportato la scrittura polinomiale del numero che i ragazzi non possedevano come prerequisito. In questa fase mi sono accontentata di una generalizzazione del tipo:

> Con *qualsiasi* numero che ha tutte le cifre dopo la prima a sinistra uguali a 0, facendo un clic dell'ultima ruota a destra in senso antiorario si muovono tutte le ruote.
>
> Con *tutti* i numeri che hanno tutte le cifre dopo la prima a sinistra uguali a 9, facendo un clic dell'ultima ruota a destra in senso orario si muovono le ruote.

Questa breve descrizione conferma l'ipotesi che l'esplorazione della Pascalina, anche come ingranaggio e non solo come macchina per il calcolo, favorisce la produzione di argomentazioni e la costruzione di successive dimostrazioni e può rappresentare un'interessante pista di lavoro per un'attività specifica in questo campo.

11.2.6. Dall'artefatto allo strumento di calcolo: addizione e sottrazione

In queste attività si portano i ragazzi a scoprire gli schemi d'uso della Pascalina nelle operazioni di addizione e sottrazione. Nelle prime schede vengono fatti rappresentare numeri sulla macchina poi si pone il problema di eseguire alcune operazioni opportunamente scelte in modo che emergano schemi d'uso differenti (schede 3-4-5-7-8)

Vediamo un esempio di addizione richiesta:

Fai l'addizione con la Pascalina 729 + 11 = ____

Spiega quello che fai. Spiega con cura quello che fa la macchina.

I numeri scelti spingono verso lo schema d'uso che porta a sommare separatamente decine e unità; così facendo con solo due movimenti si ottiene il risultato. Altri allievi preferiscono l'operazione ricorsiva +1 e operano solo sulle unità. È da notare, in entrambi i casi, la sorpresa dei ragazzi nel vedere che la Pascalina esegue i 'riporti da sola'.

Ecco i due esempi di schemi d'uso:

Posiziono la Pascalina a 729 e siccome 11 è composta da una decina e da una unità devo aggiungere 1 alla ruota gialla a destra che fa il riporto di 1 alla ruota centrale e poi devo aggiungere 1 a quest'ultima che sono le decine (Flavia)

Posiziono la Pascalina a 729 e poi giro 11 volte la ruota gialla a destra. La Pascalina fa il riporto quindi si muove anche la ruota gialla centrale (Valentina).

Nel primo caso l'alunna scompone l'addendo lavorando sulle decine e le unità, nel secondo caso l'operazione di addizione corrisponde al passaggio al successivo tante volte quante sono espresse dall'addendo.

Nel caso della sottrazione i numeri scelti spingono verso uno schema d'uso più funzionale (decomposizione) rispetto a quello ricorsivo.

Fai la sottrazione 238 - 73 = ___

Spiega quello che fai. Spiega con cura quello che fa la macchina.

Vengono infine date una serie di operazioni da risolvere con la Pascalina, richiedendo di utilizzare preferibilmente il minor numero di scatti possibile. In questo modo cominciano a evidenziarsi diversi schemi d'uso della Pascalina che vengono riassunti in un testo costruito collettivamente dalla classe.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE: ISTRUZIONI PER L'USO
127 + 18 = 145 e 127 - 18 = 109

1. Metodo +1 e -1

Se vuoi fare un'addizione con la Pascalina basta che fai +1 (girando la ruota delle unità in senso orario) tante volte quanto vale il numero che vuoi aggiungere.

Se vuoi fare una sottrazione con la Pascalina basta che fai -1 (girando la ruota delle unità in senso anti-orario) tante volte quanto vale il numero che vuoi sottrarre.

127 + 18 unità = 145   127 - 18 unità = 109

2. Metodo di scomposizione

Se vuoi fare un'addizione con la Pascalina puoi aggiungere, girando le ruote in senso orario, le ruote delle centinaia, delle decine e delle unità tante volte quante volte sono espresse dalla decomposizione del numero in centinaia, decine e unità.

Se vuoi fare una sottrazione con la Pascalina puoi togliere, girando le ruote in senso orario, le ruote delle centinaia, delle decine e delle unità tante volte quante volte sono espresse dalla decomposizione del numero in centinaia, decine e unità.

127 + 1 decina + 8 unità = 145 oppure 127 + 8 unità + 1 decina = 127

127 - 1 decina - 8 unità = 109 oppure 127 - 8 unità -1 decina = 127

3. Metodo del complemento

Se vuoi fare l'addizione o la sottrazione con la Pascalina puoi trovare il complemento a un numero di ordine superiore vicino e aggiungere o sottrarre in modo conveniente.

127 + 2 decine – 2 unità = 145 oppure 127 - 2 decine + 2 unità = 109

Nel metodo per scomposizione un aspetto interessante della Pascalina è dato dal fatto che l'ordine delle operazioni non è importante; posso aggiungere, ad esempio, prima le decine e poi le unità o viceversa in quanto è la macchina che fa i 'riporti', a differenza dell'algoritmo in colonna dove l'ordine di esecuzione delle operazioni è fondamentale. I ragazzi notano immediatamente questa differenza e ne sono deliziati. La macchina 'calcolatrice' comincia a prendere forma nell'esperienza dei ragazzi.

11.2.7. *Dagli schemi d'uso ai significati matematici*

Se l'attività precedente riguardava il legame fra artefatto e compito dato, nella costruzione dei significati matematici entra in gioco la relazione fra artefatto e sapere matematico. È l'insegnante che attraverso opportune azioni guida il passaggio da testi situati a testi matematici nel quadro della mediazione semiotica.

La consegna data in questa attività aveva proprio il fine di far esplicitare ai ragazzi le conoscenze matematiche inerenti alle diverse procedure per addizionare e il passaggio dagli schemi d'uso alle espressioni matematiche corrispondenti (schede 9 e 10).

LE OPERAZIONI. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

28 + 14

1. CRISTIAN	2. ORONZO	3. ELENA
Ho scritto il primo addendo, 28, poi ho aggiunto il secondo, ruotando in senso orario la rotella delle unità quattro volte e la rotella delle decine una sola volta. Il risultato è 42.	Ho scritto il numero 28 poi ho girato in senso orario 14 volte la ruota in basso a destra, quella delle unità. Il risultato è 42.	Ho scritto il secondo addendo 14, poi ho ruotato in senso orario la rotella delle decine per 3 volte e la rotella delle unità 2 volte in senso antiorario.

Scrivi le espressioni matematiche che rappresentano i tre diversi procedimenti

Si riportano tre esempi significativi di questo passaggio:

1. 28 (ruota unità) 4 volte↓, (ruota decine) 1 volta = ris. 42
2. 28 (ruota destra bassa) 14 volte ↓ = ris. 42
3. 14 (ruota delle decine) 3 volte↓, (ruota unità) 2 volte↑ = ris. 42 (Riccardo).

In questo esempio la presenza dello strumento è ancora molto forte, i simboli utilizzati (↓orario e ↑antiorario) indicano il movimento della macchina. Non si tratta certo di espressioni numeriche. Il passaggio ai significati matematici è ancora in fieri. Nell'esempio successivo il passaggio è avvenuto completamente, il riferimento allo strumento è completamente scomparso.

1 28 +(1+1+1+1+1)+10 = 28+4+10 = 42
2 28 +(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 28+14 = 42

3 14+10+10+10-1-1 = 14+ (30-2) = 42 (Flavia).

Il passaggio dal testo situato (descrizione dello schema d'uso utilizzato) all'espressione matematica che lo rappresenta (testo matematico) si conferma un passaggio delicato che deve essere gestito con attenzione dall'insegnante con la consapevolezza della sua complessità.

Nell'espressione aritmetica si perdono tutti i referenti fisici dello strumento, che devono essere sostituiti da segni matematici densi di significati. Molti allievi non sono riusciti a fare questo passaggio autonomamente e si sono limitati a riscrivere l'operazione 28+14 = 42. Il passaggio inverso, dall'espressione matematica allo schema d'uso corrispondente, appare molto meno complesso per gli studenti.

LE OPERAZIONI. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE
127+36 = 163

1. Paolo:
   127+(10+10+10)+(1+1+1+1+1+1) = 127+30+6 = 163
2. Elisa:
   127+10+10+10+10-1-1-1-1 = 127+(40-4) = 163
3. Giovanni:
   127+(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 163

Queste sono le espressioni aritmetiche che rappresentano i diversi procedimenti utilizzati dai tre ragazzi per fare l'addizione 127+36 sulla Pascalina. Spiega in ognuno dei tre casi i passi che i ragazzi fanno sulla Pascalina.

Quasi tutti gli studenti riescono a descrivere lo schema d'uso corrispondente all'espressione aritmetica.

Paolo ha posizionato la Pascalina a 127, poi ha aggiunto 36, girando la ruota delle decine in senso orario tre volte e la ruota delle unità in senso orario 6 volte. Il risultato è 136.
Elisa ha posizionato la Pascalina a 127, poi ha aggiunto 40 girando la ruota delle decine in senso orario quattro volte, ed ha tolto 4 girando la ruota delle unità in senso antiorario quattro volte. Il risultato è 136.
Giovanni ha posizionato la Pascalina a 127 poi ha aggiunto 36 girando 36 volte la ruota delle unità. Il risultato è sempre 16 (Federica L.).

Questo fatto indica che non è tanto l'interpretazione degli schemi d'uso a mettere in difficoltà gli studenti quanto la produzione autonoma di espressioni matematiche relative agli schemi d'uso, cioè trasformare gli schemi d'uso in linguaggio matematico.

11.2.8. Un problema curioso: 8 - 3 = 5

Per quanto la Pascalina fosse comoda per effettuare addizioni, richiedeva un procedimento più complicato per la sottrazione. Pascal aveva progettato i meccanismi per muoversi in una sola direzione. Questo significa che non era possibile eseguire la sottrazione semplicemente ruotando nella direzione opposta ma era necessaria una procedura di complemento a 9.

A titolo di esempio riportiamo il metodo per effettuare le sottrazioni con la Pascalina attraverso la somma di numeri complemento (il complemento è ciò che manca ad un numero per fare l'unità, la decina ecc.). Eseguiamo la seguente sottrazione: 5 - 3. Poiché il complemento del numero 3 è 7 (10 - 3 = 7) possiamo sommare 5 + 7 = 12 che senza il riporto dà 2 che è come dire: 5 - 3 = 5 + 7 - 10 ma anche: 5 - 3 = 5 + (7 - 10) e quindi: 5 - 3 = 5 + (-3).

Si può, perciò, affermare che la Pascalina originale faceva le sottrazioni come somma di numeri negativi utilizzando il metodo del complemento a dieci. Matematicamente è spesso utile vedere la sottrazione non come un'operazione a sé stante, ma come addizione dell'opposto del sottraendo. Così, 7 - 3 diventa la somma di 7 e di '-3'.

Ai ragazzi viene posto il seguente problema (Scheda 11)[55] per metterli nella stessa condizione della Pascalina originale. Il problema si configura del tipo "*Cosa succederebbe se… si potessero girare le ruote solo in senso orario*?". Lo scopo è quello di mettere gli studenti di fronte a una situazione problematica che tenga conto dei vincoli della macchina (tre ruote); si richiede inoltre la generalizzazione e la giustificazione del metodo individuato.

UN PROBLEMA CURIOSO

Fai la seguente sottrazione girando le ruote SOLO IN SENSO ORARIO

8 - 3 = ?

[55] L'idea di questo problema è ripresa dalla tesi di Cristina Mariani, Master in Didattica delle Scienze, Università di Udine.

Spiega con cura come fai. Sappiamo che deve venire 5, ma come si fa a fare questa operazione sulla Pascalina GIRANDO LE RUOTE SOLO IN SENSO ORARIO? Il metodo deve essere valido per tutte le sottrazioni. Cerca di spiegare perché il tuo metodo funziona.

I ragazzi devono impostare sulla Pascalina la seguente operazione: 8+ (10 3) = 15 e considerare solo l'ultima cifra. Se poi si vuole avere sulla Pascalina solo il risultato sarà necessario impostare l'operazione in modo che vadano a zero anche le ruote delle decine e delle unità quindi 998+ (10 3) = 005 perché la Pascalina ha solo tre ruote, il risultato sarebbe 1005, ma la Pascalina indica 005.

Il problema posto ha suscitato la curiosità degli studenti che si sono lanciati in tentativi di risoluzione del problema.

Alcuni studenti, tra i migliori della classe, hanno cercato di risolvere il problema trasformandolo in:

Quanto manca da 3 per arrivare a 8? Parto da 3 e arrivo a 8, e il numero di click che faccio è il risultato (Caterina).

La procedura è interessante perché significa adattare uno dei significati della sottrazione alla struttura della Pascalina. Il metodo è corretto e generalizzabile. L'unica obiezione è che non è molto efficiente nel caso di numeri un po' più grandi come nel caso di 123 - 25 = 98; significa che devo fare e contare 98 scatti. L'aspetto interessante di questa strategia è il fatto che nella procedura è implicita la motivazione teorica della sua correttezza.

Molti altri hanno lavorato direttamente sulla Pascalina cercando strategie empiriche che poi faticavano a giustificare come nel caso di Carmen:

Io ho posizionato zero centinaia e zero decine e 8 unità. Poi ho girato 997 volte e mi è uscito 005. Secondo me è sempre possibile con questo metodo perché se giriamo più volte alla fine uscirà.

Carmen non è in grado di spiegare il suo metodo pur essendo corretto in quanto corrisponde al complemento a 1000. Risulta, tuttavia, ben poco efficiente per il numero elevato di scatti. Una versione simile ma molto più efficiente è rappresentata dalla soluzione di Antonio R.C.:

Ho posizionato le ruote al numero 997 ho girato 8 volte la ruota delle unità in senso orario e ho trovato 5.

Anche in questo caso, però, lo studente non riesce a giustificare la sua strategia. L'aspetto più complesso di questa attività è, infatti, la giustificazione del metodo individuato. Solo pochi allievi sono in grado di giustificare in modo generale il metodo adottato.

Inizialmente posizioniamo la ruota delle unità sul 7, poi quella delle decine sul 9 e lo stesso per la ruota delle centinaia. Aggiungendo 8 unità il risultato è 5. Perché è come fare 8 + 997 = 005, quando la Pascalina arriva a 999 se aggiungo 1 segna 000 e poi va avanti fino a 5 (Giacomo).

Una strategia molto interessante è quello di Riccardo:

Posizioniamo la Pascalina a 994 e avanziamo con le unità di 8 poi continuiamo ad avanzare di 3 e arriviamo al risultato. Per trovare il numero di partenza faccio in questo modo. Siccome la Pascalina non supera le 9 centinaia, 9 decine e 9 unità ogni volta che si tenta di superare il 999 sulle tre ruote appare 000, quindi per fare l'operazione richiesta basta formulare il risultato sulla Pascalina (5) e poi sottrarre ad esso la somma dei due fattori (8 + 3) e così troveremo il numero da cui partire (994).

Il metodo è interessante perché Riccardo si rende conto che deve giustificare il numero di partenza e spiega come lui è riuscito a trovarlo: dà per risolto il problema. Solo in un secondo tempo, dal confronto con le strategie dei compagni, si è reso conto di cos'era il 'suo' numero di partenza 994 + 8 + 3 = (994 + 3) + 8 = (997 + 8) = 005.

La situazione problematica proposta si è rivelata molto ricca dal punto di vista della generalizzazione e giustificazione delle strategie individuate. Come evidenziato da Hanna (2007) la produzione di strategie argomentate è una delle sfide principali nell'insegnamento della matematica:

With today's stress on making mathematics meaningful teachers are being encouraged to focus on the explanation of mathematical concepts and students are being asked to justify their findings and assertions. […] Teaching students to both recognize and produce valid mathematical arguments is certainly a challenge. We know all too well that many students have difficulty following any sort of logical argument, much less a mathematical proof. But we cannot avoid this challenge. We need to find ways, through research and classroom experience to help students master the skills and gain the understanding they need. Our failure to do so will deny us a valuable teaching tool and deny our students access to a crucial elements of mathematics. (Hanna, 2007, p. 3).

11.2.9. La moltiplicazione e la divisione con la Pascalina

Se le operazioni di addizione e sottrazione sono incorporate nella Pascalina, il caso della moltiplicazione e soprattutto della divisione sono ben diverse. La moltiplicazione può essere effettuata come addizione ripetuta dove, ad esempio, 6 × 3 diventa 6 + 6 + 6 ed è necessario tenere sotto controllo quante volte si ripete l'addizione. Supponiamo di dover moltiplicare 23 × 22 con la Pascalina: si addiziona il 23 due volte sulla ruota delle unità (corrispondente a 23 × 2) e sulla ruota delle decine si addiziona due volte il 23 (corrispondente a 23 × 20), quindi l'operazione si trasforma in (23 × 2)+(23 × 20).

Per quanto riguarda l'operazione di divisione la situazione è più complessa perché la divisione con la Pascalina comporta come strategia la sottrazione ripetuta (insita nella tecnica nota col nome di 'canadese'), e quindi la consapevolezza della divisione come operazione inversa della moltiplicazione. Dal punto di vista matematico è in gioco la divisione euclidea o divisione con resto.

La divisione euclidea – o divisione con resto – è intuitivamente quell'operazione che si fa quando si suddivide un numero *a* di oggetti in sottoinsiemi di *b* oggetti e quindi si conta quanti gruppi sono stati formati e quanti oggetti sono rimasti. Il numero *a* si chiama *dividendo*, il numero *b* è il *divisore*, il numero di gruppi formati è il *quoziente* e il numero di oggetti rimanenti il *resto*.

La possibilità di operare una tale suddivisione per ogni divisore e ogni dividendo diverso dallo zero è stabilita dal seguente teorema.

Dati due interi a e b con $b \neq 0$ esiste un'unica coppia di interi q ed r detti quoziente e resto tali che:

$a = b \times q + r$

$0 \leq r < | b |$

dove $| b |$ indica il valore assoluto del divisore.

Questo significa che per ogni dividendo a e divisore b interi esiste solo una coppia di quoziente q e resto r (anch'essi interi) tali che sommando r con il prodotto di b per c si ottenga il dividendo a di partenza. Il resto r può assumere qualsiasi valore positivo (anche zero) strettamente minore di b.

Questi aspetti dell'operazione di divisione in genere sono messi in ombra dalla conquista dell'algoritmo di divisione e difficilmente in classe si riflette sui significati di questa operazione. La Pascalina rappresenta un'ottima occasione per riflettere su questi aspetti della divisione.

Le attività sono proposte come riflessione sugli algoritmi di calcolo noti e sulle proprietà delle operazioni (Schede 14-15-16).

Per quanto riguarda la moltiplicazione è interessante notare che con la Pascalina non è necessario rispettare l'ordine delle operazioni (unità, decine, ecc.) in quanto si opera come addizione ripetuta e i riporti sono effettuati automaticamente dalla macchina. Questa riflessione consente agli allievi di 'svelare' il motivo sotteso all'algoritmo in colonna della moltiplicazione, come evidenziato nelle risposte degli studenti:

Se faccio 12 × 12 moltiplicando prima le decine e poi le unità mi viene 144 perché la Pascalina fa i cambi da sola. Secondo me i due metodi sono diversi perché il metodo che ho imparato alla scuola elementare seguiva un certo ordine, cioè dovevi moltiplicare prima le unità e poi le decine, mentre con la Pascalina puoi partire da dove vuoi perché fa i cambi da sola. (Flavia).

I due metodi non sono uguali perché mentre nell'algoritmo tutto va in base alle tabelline e non si possono moltiplicare prima decine e poi unità, nella Pascalina si può fare visto che i cambi sono automatici (Giulia).

Posso dire che i due metodi sono uguali perché viene lo stesso risultato (Pasquale).

Non sono uguali i due metodi perché la Pascalina fa una sorta di addizione ripetuta tante volte quanto il secondo fattore (Riccardo).

L'operazione di divisione è stata molto più difficile di quanto prevedevo poiché i ragazzi non si erano mai trovati nelle condizioni di dover riflettere sul significato di divisione e mai avevano visto la divisione come sottrazione ripetuta. All'inizio erano perplessi e non riuscivano a trovare una strada per fare la divisione con la Pascalina, in quanto si aspettavano di vedere il risultato scritto sulla Pascalina, come avviene per le altre operazioni. Ripercorrendo la moltiplicazione come addizione ripetuta sono riusciti a pensare di sottrarre ripetutamente il divisore per svuotamento progressivo del dividendo, ma non riuscivano a capire come fare per trovare il risultato della divisione. È stato necessario simulare insieme una divisione (senza resto) per capire che era necessario contare quante volte il divisore era sottratto al dividendo e che questo rappresentava il risultato della divisione. Solo in un secondo momento si sono resi conto che il numero che rimane sulla Pascalina costituisce il resto della divisione:

Per fare la divisione 12 : 4 imposto il numero che devo dividere e sottraggo 3 per 4 volte. Così io ottengo sulla macchina 000 perché non c'è il resto, la macchina non ci dà il risultato ma ci evidenzia il resto (Federica B.).

11.2.10. E se tu fossi…? Il gioco voci-echi

Alla fine delle attività si è inquadrata storicamente la Pascalina attraverso una breve storia degli strumenti di calcolo e attraverso la lettura di alcuni brani presi da B. Pascal. In particolare si è letta la lettera che Pascal scrive al cancelliere per presentare la sua opera. Si riporta la versione fornita ai ragazzi di tale lettera con le istruzioni per l'uso della Pascalina.

La lettera di Pascal

A Monsignore il Cancelliere
Monsignore,
se la collettività avrà qualche vantaggio dalla mia invenzione che consente di eseguire ogni genere di operazione aritmetica, in modo nuovo e comodo, io avrò solo il merito di averla pensata, mentre il merito è tutto vostro che mi avete spinto a realizzarla.. Le lungaggini e le difficoltà degli strumenti di cui ci serviamo normalmente per i calcoli mi hanno indotto a pensare a un aiuto più veloce e più semplice, anche per le mie esigenze personali, al fine di alleggerirmi nei calcoli in cui sono occupato da qualche anno, a causa dei molti obblighi del lavoro con cui avete voluto onorare mio padre, al servizio di Sua maestà, in Normandia.
La facilità con la quale questa macchina esegue l'operazione, potrà verificarlo nella pratica, se avrà la pazienza di fare un confronto con i metodi di operare attraverso i gettoni o la penna. Lei sa come, operando con i gettoni, chi calcola (soprattutto se non ha una certa pratica), per paura di cadere in errori è sovente costretto a utilizzare lunghe sequenze di gettoni e sa anche come la necessità lo obblighi poi ad accorciare e togliere i gettoni che non servono più. In questo può vedere due lavori inutili, con una doppia perdita di tempo. Questa macchina invece semplifica ed elimina nelle sue operazioni tutto quanto è superfluo, il più incompetente troverà tanti vantaggi quanto il più esperto. Senza trattenere o prendere a prestito nulla, la macchina fa da sola quanto l'operatore desidera, senza che lui se ne debba in alcun modo preoccupare.

Voglio inoltre dirvi che alcuni tra i principali matematici del paese,hanno tanto apprezzato la mia opera che, senza ritenerlo un disonore, si sono impegnati persino a insegnarne l'uso a chi ne avesse manifestato desiderio.
Il vostro umilissimo e obbedientissimo servitore

Blaise Pascal, addì 1645

Dopo la lettura si è richiesto ai ragazzi di scrivere una lettera come se fossero Pascal:

Immagina di essere Pascal e vuoi mandare una lettera al Granduca del tuo paese per raccontare della tua grande invenzione: una macchina per calcolare! Cerca di spiegare bene come deve essere utilizzare la macchina per fare le operazioni di addizione e sottrazione e quali sono i vantaggi e i limiti della tua invenzione. Puoi fare disegni ed esempi.

Questa particolare attività si inserisce in un filone di ricerca messo a punto dal Gruppo di Ricerca dell'Università di Genova, coordinato dal prof. Paolo Boero, di cui ho fatto parte per molti anni, chiamato "*Gioco voci ed echi*". Non è questa la sede per descrivere nei particolari tale metodologia didattica, tuttavia è utile farne alcuni brevi cenni.

La metodologia didattica del 'Gioco voci-echi' si propone di favorire l'approccio degli allievi agli aspetti teorici della matematica e, più in generale, alle teorie scientifiche (in particolare nei loro aspetti più lontani dalle conoscenze e dal pensare comune). Tale metodologia si fonda sull'attività di imitazione attiva nella "zona di sviluppo prossimale" (Vygotskij) degli allievi e sulla constatazione che molti aspetti teorici della matematica, e, più in generale, delle scienze sono portati da 'voci', in particolare da 'voci' storiche: espressioni dense e incisive attraverso le quali tali aspetti teorici si sono manifestati, hanno modificato e modificano il nostro modo 'spontaneo' di pensare e di esprimerci in campo matematico e scientifico. Il "Gioco voci-echi" consiste nell'appropriazione di 'voci' (in particolare, 'voci' storiche) da parte degli allievi (sotto la guida dell'insegnante) e nella successiva produzione individuale di 'echi' attraverso consegne del tipo: "*Come Aristotele avrebbe potuto interpretare il fatto che una piuma cade più lentamente di un pezzo di legno*" (III media), "*Come potresti progettare un esperimento simile a quello di Mendel con dei gatti*" (II/III media), "*Se tu fossi Platone come potresti scrivere un dialogo sull'errore di...*" (V elementare, II media), ecc.

La gestione da parte dell'insegnante delle produzioni individuali ('echi') degli allievi (attraverso il confronto e la discussione collettiva da lui/lei orchestrata) consente di sviluppare in classe la consapevolezza dei contenuti anti-intuitivi e dei caratteri salienti del sapere teorico portati dalle ‘voci’ storiche.

La metodologia didattica del ‘Gioco voci-echi’ si propone di superare (attraverso la proposizione di ‘voci’ alla classe e la richiesta di ‘echi’ a tali ‘voci’ da parte degli alunni) i limiti dei due tipi più comuni di approccio scolastico agli aspetti teorici della matematica e ai contenuti anti-intuitivi delle teorie scientifiche:

- l'approccio tradizionale (il più diffuso nella scuola in Italia e in altri Paesi), che consiste nell'insegnare le teorie matematiche e scientifiche. Come è ben noto, tale approccio ha per effetto che la maggior parte degli alunni imparano delle formule matematiche e delle leggi utili per risolvere problemi/esercizio simile ai problemi standard risolti in classe dall'insegnante, ma non riescono veramente a collegare tali formule ai fenomeni ed ai problemi considerati (tanto è vero che falliscono in compiti anche facili di problem solving autentico);

- l'approccio costruttivista, che prevede che gli alunni arrivino gradualmente (sotto la guida dell'insegnante) a formulare loro ipotesi sulle leggi che ‘governano’ i fenomeni considerati o sulle questioni matematiche affrontate. Tale approccio richiede un tempo molto lungo, non compatibile con la quantità delle conoscenze che la scuola deve trasmettere. Inoltre, nel caso di fenomeni come quello della caduta dei gravi e quello della trasmissione dei caratteri ereditari, le modellizzazioni matematiche elaborate dalla scienza moderna (anche le più elementari) non sono in accordo con le osservazioni e le spiegazioni più immediate. In effetti le esperienze condotte indicano che nei momenti decisivi l'insegnante deve quasi sempre intervenire con le sue spiegazioni per fornire le ipotesi e le formule accreditate dalla scienza (ricadendo nei limiti dell'approccio tradizionale) in quanto si trova ad operare in contrasto con le ipotesi formulate dagli alunni.

Nell’esperienza della classe di Lizzano (TA) lo scopo di questa attività era quello di vedere se e quanto gli studenti avevano interiorizzato il senso delle attività sulla Pascalina e analizzare quali aspetti del lavoro sulla Pascalina venivano messi in evidenza dagli studenti. La voce storica proposta, lettera di Pascal, è una voce non dialogica, a differenza delle voci storiche utilizzate nelle esperienze del Gruppo di Genova (Galileo e Platone), tuttavia poteva diventare dialogica nell’eco dei ragazzi se fossero riusciti a mettere in connessione (ossia a far dialogare) la voce storica con la loro esperienza.

I protocolli dei ragazzi sono molto ricchi e interessanti e sono stati analizzati attraverso i seguenti criteri:

- Produzione di un'eco meccanica e superficiale alla lettera di Pascal: l'attenzione non è sulla Pascalina, ma sui modi per diffonderla (Pasquale P.);
- Produzione di un'eco meccanica alla lettera di Pascal, descrivendo superficialmente la Pascalina più come artefatto che come strumento (Antonio P.);
- Produzione di un'eco capace di far emergere nella lettera l'esperienza vissuta attraverso esempi o descrizioni generali, quindi presenta lo strumento più che l'artefatto (Marco L.).

Si riportano tre esempi di lettere prodotte dai ragazzi.

Primo esempio:

Egregio marchese le sto scrivendo per dirle che ho inventato una macchina che le potrebbe piacere, si chiama pappadina [dal cognome dello studente], all'inizio della lettera infatti ci ho messo una foro, ma poi gliene mando una per posta. Ho già alcune proposte a delle aziende di sponsorizzare la mia pappadina e così mi hanno fatto molte offerte credendola un'invenzione brillante. Ma il merito sarà anche suo perché ho costruito la pappadina per farle piacere. Inoltre sarà molto utile anche a scuola per fare i conti più facilmente senza abachi o penne.

Dal vostro umile cittadino
Pappadà Pasquale

Secondo esempio

Al Marchese Chiurlya,
Signor Marchese,
le scrivo questa lettera, per informarla che ho inventato una macchina matematica, che semplifica i calcoli e li rende più veloci. Su questa macchina si possono rappresentare cifre fino alle centinaia e si possono svolgere tutte e 4 le operazioni. È molto semplice da usare e se vuole posso venire al castello per farvela provare.

Ve la voglio descrivere:
questa macchina è composta da 5 ruote dentate, 3 sotto e 2 sopra, sulle ruote dentate che ci sono sopra, vi sono sopra ognuna una lineetta, invece sulle ruote che ci sono giù vi sono scritti dei numeri.

Io questa macchina l'ho inventata sì per per semplificare e rendere più veloci i calcoli, ma anche per semplificare i calcoli per quelle persone che sono meno capaci. Se lei riuscisse a metterla in commercio io soltanto le chiedo di non metterla a un prezzo caro, così anche i meno ricchi potranno acquistarla.

Il vostro umilissimo servitore
Pappadà Antonio.

Terzo esempio:
Celebre Altezza Chiurlya,
a voi scrivo, maggiore autorità di questo piccolo ente, per denunciare la scoperta, modestamente, del secolo ideata da me, un umile studente medio iscritto al vostro istituto “A. Chionna”.
Ho generato una macchina, la Pascalina, allo scopo principale di risolvere più facilmente i compiti di matematica al ritorno da scuola, ma essa può essere usata per compiti più grandi di stupidi e semplici compiti studenteschi, può essere usata a livello mondiale da ogni persona, dal più esperto fino al più deficiente in materia. Infatti è semplicissima da usare e distruggerebbe tutte le immense complicazioni che i calcoli moderni sono soggetti a dare. Il suo unico limite è che non può effettuare le operazioni algebriche e le espressioni, ma è un oggetto pensante quando si tratta delle quattro operazioni base.
L’addizione, che si compie facendo girare una ruota in senso orario, in base al valore degli addendi, tante volte quanto valgono tutte le cifre dell’operazione.
La sottrazione, identica all’addizione, con la sola differenza di girare le ruote dentate in senso antiorario.
La moltiplicazione che è costituita dal ripetere il numero del primo fattore tante volte quant’è il secondo.
La divisione, che si può ottenere formando un gruppo numerale pari al divisore ed andare in senso antiorario nel dividendo tenendo sempre conto di quante volte entri il gruppo numerale precedentemente impostato fino ad arrivare a zero o a un numero minore del divisore.
Come avete potuto notare la Pascalina è un aggeggio con ruote che indicano il valore dalle unità in su e delle ruote che effettuano automaticamente il riporto!!!
Dunque, maestà non ho più niente da riferivi, spero rimaniate affascinato da questa novità tanto da poterla brevettare e pubblicare anche a livello nazionale o più.

Cordialissimi saluti dal vostro umile suddito Lecce Marco

Attendo responso.

Come si vede da questi esempi, la richiesta di eco alla lettera di B. Pascal ha in parte messo in luce il percorso e il senso dell’esperienza vissuta, tuttavia non emergono le riflessioni sui significati matematici discussi e sulle attività di argomentazione, ma nemmeno la voce storica porta alla luce il sapere matematico sotteso alla Pascalina.

11.2.11. Riflessioni

L'intera attività sulla Pascalina ha avuto come scopo principale quello di validare il quadro teorico utilizzato mettendone in luce in particolare gli elementi che caratterizzano l'approccio all'attività del Laboratorio di Matematica del gruppo di Ricerca dell'Università di Modena e Reggio. Lo schema seguente (Fig. 6) riassume in forma sintetica le interazioni che avvengono all'interno del laboratorio di matematica quando si utilizza uno strumento. In alto si collocano gli studenti che devono risolvere un compito con l'uso di un artefatto (la Pascalina). Il compito è stato progettato dall'insegnante in relazione a un certo significato matematico (ad esempio le proprietà dell'addizione e della sottrazione). Il vertice in alto a destra allude alle produzioni degli studenti (nel nostro caso testi scritti, ma potrebbero essere gesti, parole, testi scritti, disegni, ecc.) che consentono all'insegnante di osservare e capire gli schemi d'uso messi in opera. Sugli schemi d'uso, che prevedono l'azione diretta degli studenti sulla macchina e sono riconoscibili dalle tracce osservate, l'insegnante metterà poi in luce la costruzione dei significati matematici. Il lato destro dello schema allude al complesso processo che consente la trasformazione e il collegamento dei testi prodotti dagli studenti e fortemente contestualizzati in testi matematici, coerenti con i significati da costruire (ad esempio il passaggio dalla descrizione dei diversi schemi d'uso per l'addizione alle espressioni matematiche che le rappresentano). Come si è visto nella descrizione dell'esperienza, le frecce laterali (dal sapere al compito e dai testi situati ai testi matematici) vanno nelle due direzioni. Infatti, ad esempio, è stato importante anche il passaggio dall'espressione matematica (testo matematico) allo schema d'uso (testo situato).

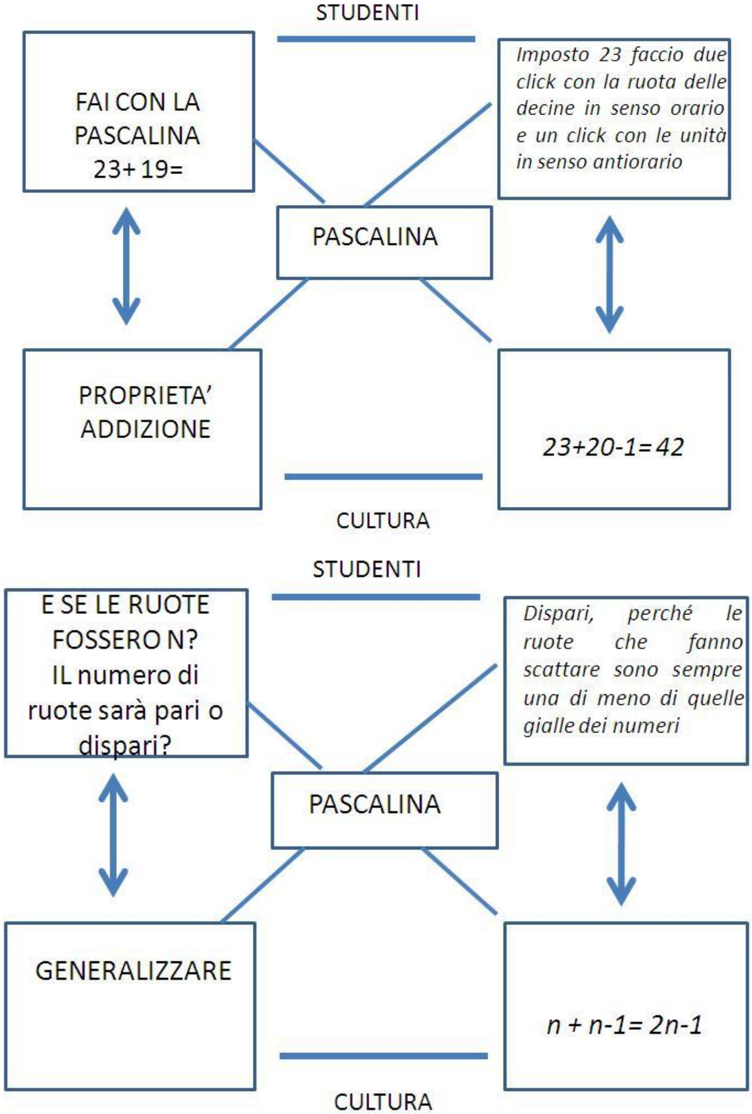


Figura 6 - Due esempi di mediazione semiotica

11.3 La sperimentazione con i pantografi

L'attività sulle macchine geometriche, i pantografi per le trasformazioni nel piano, risulta abbastanza diversa dalla precedente per i seguenti motivi:

- sicuramente i pantografi sono macchine matematiche più complesse rispetto alla Pascalina ed è sicuramente più difficile per gli studenti collegare la macchina con la matematica in essa incorporata in quanto le proprietà geometriche e le relazioni geometriche fra le diverse parti della struttura della macchina sono un ambito poco frequentato dagli studenti e dai docenti della scuola secondaria di primo grado, come dimostrano le rilevazioni INVALSI[56];
- le conoscenze sulle trasformazioni geometriche sono molto meno approfondite rispetto agli algoritmi di calcolo sulle quattro operazioni. Nonostante la presenza di questo contenuto matematico nei programmi già dal 1979 (*Programmi per la scuola media*) e ripresi nelle *Indicazioni per il curricolo* del 2007, le attività sulle trasformazioni geometriche si limitano perlopiù a una classificazione di trasformazioni isometriche nella scuola primaria (soprattutto simmetria assiale e traslazione) che, a volte, vengono riprese nella scuola secondaria di primo grado. Le trasformazioni non isometriche, inoltre, sono ben poco trattate nella pratica didattica più diffusa: ci si limita ad attività di riduzioni o ingrandimenti in scala, e allo studio delle proprietà delle figure simili senza unificarle all'interno del grande gruppo delle trasformazioni.

L'obiettivo principale della sperimentazione era soprattutto legato all'esplorazione della macchina e all'analisi degli aspetti geometrici in essa incorporata.

La struttura esplorativa è guidata da una serie di domande chiave, presenti anche nell'attività sulla Pascalina e in generale caratteristiche dell'esplorazione di tutte le macchine utilizzate nel progetto MMLab-ER. Sulla base del quadro teorico scelto le consegne per gli studenti si articolano intorno a quattro temi fondamentali: i primi due alludono in modo diretto all'approccio strumentale di Rabardel (artefatto-strumento), gli ultimi due a situazioni di produzione di congetture e attività di risoluzione di problemi.

Artefatto: come è fatto? Con questa prima domanda si vuole focalizzare l'attenzione degli studenti sulle componenti fisiche della macchina matematica. Ad esempio, nei sistemi articolati la lunghezza e il confronto tra le aste, la presenza di punti fissi e di scanalature.

Strumento: che cosa fa? La domanda sposta l'attenzione verso la macchina matematica come strumento. Si passa da una fase di esplorazione

[56] Nelle rilevazioni SNV 2009-2010 i quesiti dell'ambito Spazio e figure che richiedevano la giustificazione di proprietà geometriche si sono rivelati i più difficili per i ragazzi della scuola secondaria di primo grado. (*www.invalsi.it*).

della struttura della macchina in relazione ai movimenti possibili (posizioni limite, zone di piano raggiungibili dalla macchina, gradi di libertà dei diversi punti, ecc.) all'appropriazione degli schemi d'uso della macchina (individuare puntatore e tracciatore, ricalcare e/o tracciare figure nel caso dei pantografi). Questa esplorazione mira alla generazione di congetture sul funzionamento della macchina.

Significati matematici: perché lo fa? La domanda vuole stimolare la produzione di argomentazioni a sostegno delle ipotesi prodotte nel punto precedente. Le argomentazioni possono basarsi su considerazioni fisico-meccaniche legate alla struttura e al movimento della macchina, oppure sull'individuazione delle proprietà matematiche incorporate in queste.

Risoluzione di problemi: Cosa succederebbe se…? La domanda coinvolge possibili modifiche nella struttura della macchina e quindi la produzione di ipotesi sui cambiamenti nel funzionamento e nei risultati della macchina.

La progettazione delle attività esplorative sui pantografi aveva come scopo la validazione di un percorso didattico originale che avrebbe dovuto essere la base di ulteriori percorsi didattici da proporre ai docenti del Progetto MMlab-ER. In altre parole si configurava come un 'esperimento didattico' per la verifica della seguente ipotesi di ricerca: *l'attività esplorativa di una macchina matematica in attività di Laboratorio di Matematica favorisce la produzione di congetture e lo sviluppo di processi argomentativi sugli aspetti matematici incorporati dalla macchina*.

È importante sottolineare che dal punto di vista delle attività matematiche in gioco l'attenzione non era tanto sulla scoperta delle proprietà delle trasformazioni geometriche realizzate dalle macchine, ma piuttosto su attività fondanti la conoscenza matematica: argomentare, congetturare, giustificare, porsi e risolvere problemi.

Le tre macchine utilizzate per la sperimentazione, pantografo per la simmetria assiale, pantografo per lo stiramento (Delunay) e pantografo per l'omotetia (Scheiner), rappresentano inoltre un ideale passaggio da trasformazioni isometriche a trasformazioni non isometriche.

11.3.1. Il percorso didattico sui pantografi

Il percorso didattico progettato prevedeva le seguenti fasi (Schede in appendice):

a) Il pantografo per la simmetria assiale

- Alla scoperta del pantografo: come è fatta la macchina? (Schede 1 e 2)
- Alla scoperta del pantografo: cosa fa la macchina? (Schede 3-4-5 e 5 bis)
- Alla scoperta del pantografo: perché lo fa? (Scheda 6)
- Analizziamo la struttura articolata: costruiamo con filo e cannucce. Il rombo articolato nella realtà. Figure simmetriche (Schede 7-8-9)

b) Il pantografo per lo stiramento (Delunay)
- Alla scoperta del pantografo di Delunay: come è fatta la macchina? (Schede 10-11)
- Un confronto fra due pantografi (Scheda 12)
- Alla scoperta del pantografo di Delunay: cosa fa la macchina (Scheda 13)
- Alla scoperta del pantografo di Delunay: perché lo fa? (Scheda 14)

c) Il pantografo di Scheiner
- Alla scoperta del pantografo di Scheiner: come è fatta la macchina (Scheda 15)
- Alla scoperta del pantografo di Scheiner: cosa fa la macchina (Scheda 16)
- Alla scoperta del pantografo di Scheiner: proviamo a costruirlo (Schede 17 e 18)
- Alla scoperta del pantografo di Scheiner: la storia (Scheda 19)

d) Verifica finale: analizzare le trasformazioni di figure e individuare la macchina che produce la trasformazione, spiegando con cura il motivo della scelta.

Come si vede dal percorso, l'esplorazione più approfondita è prevista per il primo pantografo poiché all'inizio gli studenti devono acquisire confidenza con la macchina e acquisire abilità manuali nel disegnare figure con il pantografo. Il secondo pantografo (Delunay) è esplorato per differenza con il primo e l'attività sul pantografo di Scheiner si sposta verso la costruzione dell'artefatto, poiché si ipotizzava che la richiesta di argomentazioni sul perché la macchina produca un'omotetia fosse troppo complessa per studenti di una prima media. Come si vedrà nei paragrafi successivi, il percorso sull'esplorazione del pantografo di Scheiner è stato modificato nel corso dell'esperienza, tenendo conto degli sviluppi dell'intero percorso e delle reazioni degli studenti.

11.3.2. Il pantografo per la simmetria assiale

La prima macchina presentata è stata il pantografo per la simmetria assiale (Fig. 7). Gli studenti sono stati divisi in cinque gruppi (poiché cinque erano i pantografi di ognuno dei tre tipi a disposizione).

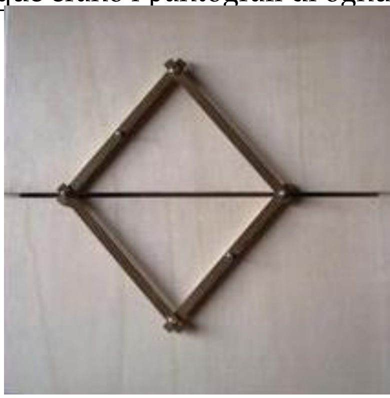
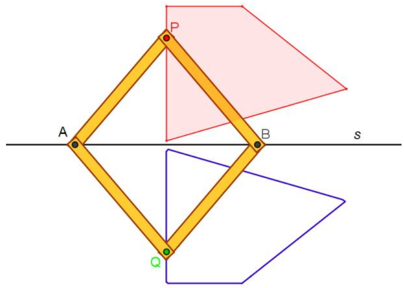
<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Fotografia</td><td>Immagine di una animazione virtuale</td></tr>
<tr><td colspan="2">Il pantografo è formato da un rombo articolato AQBP i cui vertici A e B sono vincolati a muoversi su una scanalatura s mentre gli altri due vertici, P e Q, hanno due gradi di libertà.
La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni limitate di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a s. Per le proprietà del rombo e per come questo è incernierato al piano (una delle diagonali giace sulla scanalatura s), i punti P e Q si corrispondono in una simmetria assiale (in cui l'asse è la scanalatura s). Quando P percorre una traiettoria assegnata, Q descrive la traiettoria simmetrica.</td></tr>
</table>

Figura 7 - Il pantografo per la simmetria assiale

La richiesta di disegnare la macchina e di descriverla, come visto anche nel caso della Pascalina, mette in luce aspetti interessanti: in molti casi abbiamo un disegno dell'oggetto fisico che viene rappresentato con aste, viti e bulloni; in altri casi la rappresentazione del pantografo è già sul modello matematico (Fig. 8).

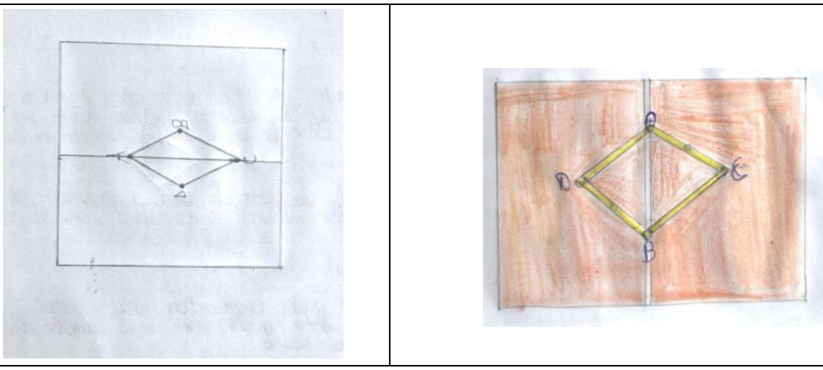


Figura 8 - I disegni del pantografo

La prima esplorazione riguarda l'artefatto: vertici liberi, vertici vincolati e ciò che maggiormente colpisce è il tipo di movimento che il sistema articolato esegue. Si chiede infatti ai ragazzi di muovere la macchina ad occhi chiusi per 'sentire' il movimento. Alcuni testi dei ragazzi:

Quando due vertici opposti si avvicinano gli altri si allontanano dalla scanalatura oppure se tengo le mani sui vertici liberi, quando una mano va sopra l'altra la segue, quando l'altra va in basso l'altra la segue (Claudia).

La macchina quando va in sopra si chiude e in giù si apre (Pasquale).

Succede che muovendo un vertice l'altro si muove nello stesso senso, cioè se si spinge nello stesso senso, all'interno, anche l'altro va nel senso interno (Riccardo).

Muovendo un vertice in modo orizzontale in un senso il vertice opposto va nel senso opposto; muovendo invece un vertice in verticale il vertice opposto lo segue (Antonio).

Per quanto riguarda la struttura articolata i ragazzi non hanno difficoltà a riconoscere il rombo nel sistema articolato.

Il sistema articolato è formato da quattro aste, tali aste possono formare rombi e, se creiamo le condizioni giuste, anche il quadrato (Marco).

La seconda esplorazione portava a individuare i limiti della macchina: in quali aree del piano si può disegnare? Ecco alcune osservazioni:

La macchina non disegna nella zona che ho segnato perché le aste non sono abbastanza lunghe (Antonio).

E i ragazzi sono in grado di interpretare correttamente la seguente immagine[57] (Fig. 9) che rappresenta le zone limite della macchina:

Secondo me questo significa che nella parte bianca non si riesce a disegnare (Flavia).

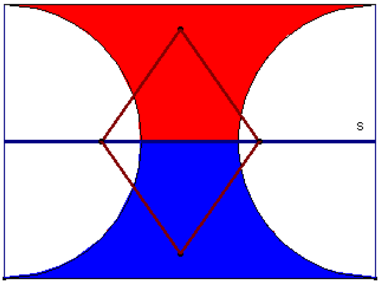


Figura 9 - Le zone limite del pantografo per la simmetria assiale

Il passaggio allo strumento attraverso la scoperta degli schemi d'uso non è stato banale in quanto gli studenti all'inizio dovevano acquisire una certa manualità nel disegno con il pantografo. Si può osservare che la prima volta hanno fatto il disegno iniziale sul foglio senza tener conto delle zone limite e nel fare il disegno simmetrico si sono resi immediatamente conto del significato pratico di 'zona limite'. La tecnica per disegnare con il pantografo che si è rivelata più funzionale è stata quella di disegnare contemporaneamente con il tracciatore e il puntatore (ovviamente i due studenti che disegnavano dovevano procedere in sincronia). In questa fase gli studenti dovevano fare disegni prestabiliti (segmenti, triangoli, quadrilateri) in modo da acquisire manualità nell'uso del pantografo. Le osservazioni sul risultato finale del pantografo rivelano conoscenze molto diverse fra loro circa la simmetria assiale:

È come in uno specchio (Riccardo).

[57] Nell'immagine le zone bianche sono quelle dove la macchina, per ragioni strutturali, non riesce a disegnare, mentre le zone rosse e blu sono le parti del piano raggiungibili dai tracciatori.

Le figure non cambiano le misure, ma sono solo ribaltate come uno specchio. La diagonale è l'asse di simmetria (Federica).

La macchina ricopia le figure solo che le ricopia al contrario come uno specchio (Claudia).

La figura si specchia dall'altra parte del foglio (Marco).

Il riferimento allo specchio è presente in tutti i protocolli degli studenti. I ragazzi si divertono a fare figure e disegni personali e diventano presto abili nell'uso della macchina (Fig. 10) (Federica L.).

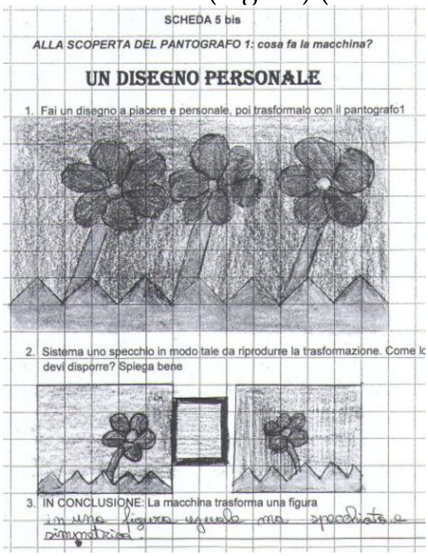


Figura 10 - Un disegno con il pantografo

Nella fase relativa alla ricerca delle argomentazioni sul perché la macchina disegna una figura simmetrica gli studenti vengono guidati da una serie di domande: quali sono le caratteristiche geometriche del sistema articolato? Come sono i lati? Come sono le diagonali? A quale elemento della figura corrisponde la scanalatura? Perché la macchina fa una simmetria assiale?

Vediamo alcune risposte dei gruppi a quest'ultima domanda:

Perché tutti punti tracciati dal tracciatore sono equidistanti dalla guida (Francesco).

Perché i vertici P e Q sono gli estremi della diagonale del rombo e sono alla stessa distanza dalla guida (Antonio).

Perché il tracciatore e il puntatore sono alla fine della diagonale che è perpendicolare all'altra che poi è la guida (Riccardo).

Come si può notare gli aspetti matematici si intrecciano inevitabilmente con gli elementi fisici dell'artefatto.

L'ultima fase prevedeva la costruzione con cannucce e filo del sistema articolato e la richiesta di costruire un sistema articolato diverso dal rombo con i lati uguali a due a due. Vengono per questo fornite cannucce di lunghezza diversa. La situazione proposta è la seguente:

È possibile costruire un quadrilatero diverso dal rombo ma che disegna ugualmente una simmetria assiale? Quali condizioni deve soddisfare?

La difficoltà non era tanto quella di trovare il quadrilatero, ma di giustificare perché quel certo quadrilatero poteva sostituire il rombo nel pantografo.

Si può fare con due cannucce di diversa dimensione, due piccole con la stessa misura e due grandi sempre della stessa misura perché sono equidistanti dalla guida (Antonio G.).

Sì, è possibile modificare la figura rendendola un deltoide in modo però che la figura rimanga sempre assiale e quindi che il tracciatore segua sempre il puntatore (Valentina).

Facendo il disegno di un aquilone e funziona perché il puntatore e il tracciatore sono equidistanti (Gianluca) (Fig. 11).

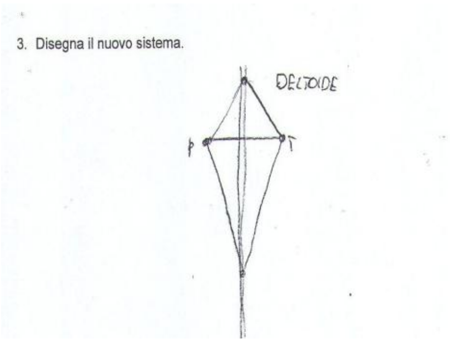


Figura 11 - La modifica del sistema articolato

Come è possibile notare, l'individuazione della proprietà geometrica necessaria affinché il pantografo disegni una simmetria assiale viene identificata con relativa facilità dagli studenti, che sono anche in grado di immaginare di modificare la figura del sistema articolato, mantenendo la condizione di equidistanza tra puntatore e tracciatore.

11.3.3. Il pantografo per lo stiramento (Delunay)

Il pantografo di Delunay viene proposto in quanto il sistema articolato che lo compone è lo stesso di quello del pantografo per la simmetria assiale: il rombo. Tuttavia una differenza apparentemente piccola, la posizione della scanalatura, fa sì che la trasformazione sia molto diversa: non più una trasformazione isometrica, ma uno stiramento. (Fig. 12).

Nella prima esplorazione dello strumento molti allievi sembrano non rendersi conto delle differenze con il pantografo precedente, muovono la macchina a occhi chiusi per 'sentire' come si muove e la descrivono:

> Se muovo un vertice verso l'alto anche il vertice opposto lo segue, mentre quando muoviamo un vertice verso destra o verso sinistra il vertice opposto si muove in senso inverso. Il sistema articolato è formato da 4 aste uguali, la figura geometrica è un rombo. Un altro elemento importante è la guida (Giulia).

Come si vede, la descrizione non coglie la caratteristica principale del pantografo di Delunay e la descrizione potrebbe andare bene anche per il pantografo per la simmetria assiale. Pochi notano la differenza:

> Una mano quando fa un movimento l'altra lo segue con una differenza: le due mani non hanno la stessa distanza dalla guida (Federica L.).

> Non si muove uguale, ma solo un po' più lontano (Antonio C.).

> Succede che ogni forma che faccio sulla macchina viene molto distante dalla guida (Pasquale).

> È formato da quattro aste. Formano un rombo e ci sono altri elementi importanti, la guida e le viti che ci scorrono dentro che sono poste a un terzo della macchina (Marco).

Molto interessanti sono queste ultime due osservazioni: Antonio fa un'ipotesi sulla figura che la macchina può disegnare. L'ipotesi non è corretta perché lui sembra immaginare semplicemente che la figura venga disegnata più spostata rispetto alla guida, ma è interessante che non descriva il movimento come richiesto, ma cerchi di immaginare il prodotto della macchina. Marco fa un'osservazione ugualmente interessante, notando la principale differenza di questo pantografo rispetto al precedente.

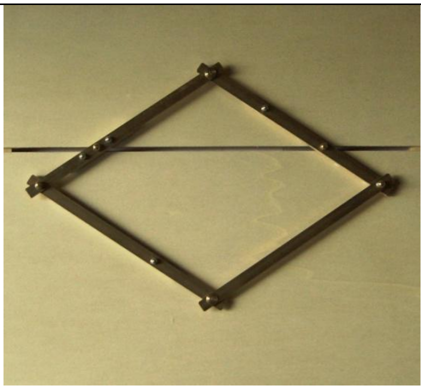
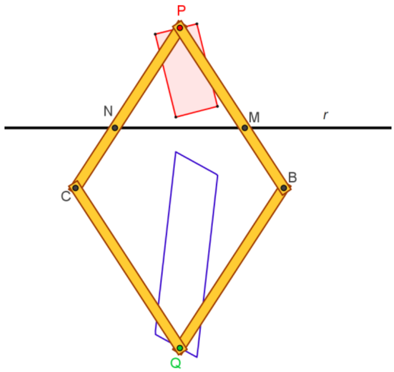
<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Fotografia</td><td>Immagine di una animazione virtuale</td></tr>
<tr><td colspan="2">Il pantografo è formato da un rombo articolato BPCQ i cui punti M e N (appartenenti rispettivamente ai lati BP, PC e scelti in modo che sia PM = PN) sono vincolati a scorrere entro la scanalatura rettilinea r, mentre i vertici P e Q hanno due gradi di libertà.
La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni limitate di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a s. Sfruttando le caratteristiche del rombo e come questo sia incernierato ad r (la scanalatura è parallela ad una diagonale del rombo), si dimostra che la retta PQ si mantiene (durante la deformazione del sistema) perpendicolare a r, e che risulta sempre costante il rapporto k delle distanze di P e di Q da r (k = (2PB-PM)/PM). Quindi le regioni piane (limitate), descritte da P e da Q nei semipiani opposti aventi r come origine comune, si corrispondono in quella particolare affinità che viene chiamata stiramento.
Quando P percorre una figura assegnata, Q descrive la sua trasformata secondo uno stiramento di rapporto k.</td></tr>
</table>

Figura 12 - Il pantografo per lo stiramento (Delunay)

Tutti i ragazzi disegnano correttamente il pantografo di Delunay, quindi sembra che si siano resi conto della differenza, ma facciano fatica ad esprimere a parole questa differenza (Fig. 13).

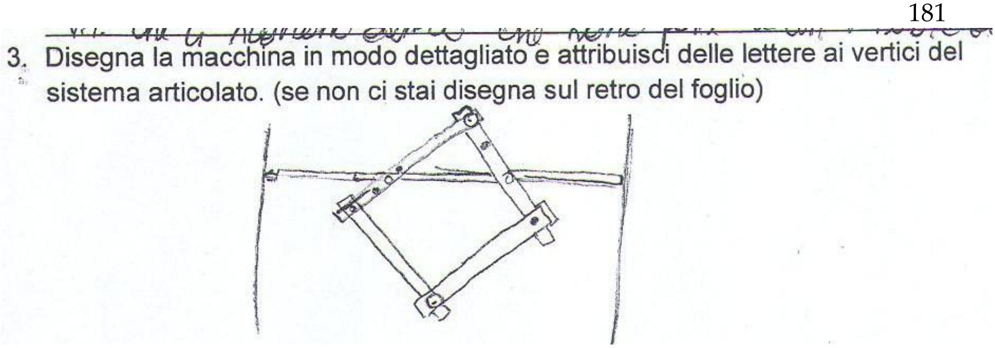


Figura 13 - I disegni del pantografo di Delunay

I limiti della macchina, in analogia con la precedente, vengono individuati facilmente (Fig. 14), ma gli studenti non sono in grado di cogliere la differenza (si tratta di una porzione di ellisse) con le zone limite del pantografo per la simmetria assiale.

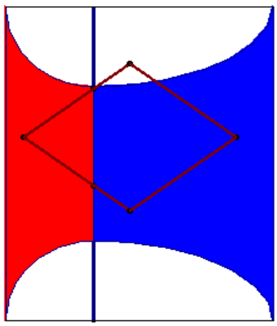


Figura 14 - Le zone limite del pantografo di Delunay

Prima di passare a utilizzare la macchina per scoprire quale trasformazione produce, ho ritenuto importante confrontare la struttura delle due macchine e chiedere ai ragazzi di formulare ipotesi sulla trasformazione prodotta dal pantografo di Delunay sulla base delle differenze di struttura della macchina. Per questo ho disegnato sulla scheda una lettera (P) e ho chiesto di immaginare come sarebbe venuta con il nuovo pantografo. Per quanto riguarda le differenze, come ipotizzato sopra, i ragazzi le riconoscono bene:

I due pantografi hanno diversa la posizione della guida (Caterina).

Nel Pantografo di Delunay la guida non è al centro, ma nel mezzo fra le aste (Antonio P.).

A proposito della formulazione delle ipotesi vediamo opzioni diverse: alcuni disegnano una lettera semplicemente ingrandita o rimpicciolita, ma molti altri individuano correttamente la trasformazione:

Il pantografo trasforma la P più grossa nella pancia che è rivolta verso sinistra (Valentina).

Qualcuno usa proprio il termine 'stiramento':

Diventa così perché la macchina stira le figure (Pasquale P.).

La verifica delle ipotesi prodotte consiste nel disegnare figure con il pantografo. Vengono disegnati segmenti perpendicolari e segmenti paralleli alla guida, figure geometriche e altre figure a piacere. Ecco alcune soluzioni:

La macchina le figure le trasforma più grandi o più piccole (Valentina).

La macchina trasforma le figure parallele uguali mentre quelle perpendicolari sono il doppio (Federica B.).

Le argomentazioni relative al perché la macchina 'stira' le figure sono in genere fatte per confronto con il pantografo per la simmetria assiale. In effetti la scelta di fare il pantografo di Delunay collegato al pantografo per la simmetria assiale e di proporre inizialmente un confronto ha spinto in questa direzione e si è rivelata utile. Vediamo alcune delle argomentazioni prodotte:

La guida non è nel mezzo, per questo le figure vengono così (Emanuele).

Le figure si stirano dalla parte opposta alla guida perché la distanza del tracciatore dalla guida è maggiore che dall'altra parte (Giacomo).

Il percorso completo di Marco è particolarmente interessante per la coerenza fra esplorazione e argomentazione. Fin dall'inizio individua la differenza strutturale fra i due pantografi e sulla base di questa produce una congettura coerente con questa osservazione.

- Primo passo (Artefatto):

È formato da quattro aste. Formano un rombo e ci sono altri elementi importanti, la guida e le viti che ci scorrono dentro che sono poste a un terzo della macchina.

- Secondo passo (Artefatto-strumento):

La guida non passa nei vertici B e C, ma passa su un terzo del pantografo, quindi non possono lavorare nella stessa zona.

- Terzo passo (Congettura):

Nel pantografo di Delunay, le linee perpendicolari alla guida vengono raddoppiate.

L'aspetto che colpisce è la coerenza dei tre passi dall'analisi dell'artefatto alla produzione di una ipotesi argomentata, nonostante un errore nel disegno (non tutte le parti della lettera P perpendicolari alla guida vengono stirate) (Fig. 15).

Nella verifica successiva, che consiste nel disegnare figure con il pantografo, Marco arricchisce la sua ipotesi alla luce dei disegni ottenuti:

- Quarto passo (Strumento-verifica)

La macchina trasforma le figure capovolgendole come lo specchio, ma anche raddoppiando le linee perpendicolari alla guida e anche le non parallele alla guida. Le parallele alla guida non le trasforma.

Infine, nell'ultima parte, alla domanda *Perché si produce uno stiramento?* Marco è in grado di collegare le proprietà geometriche del pantografo con la trasformazione prodotta, mostrando un'interessante coerenza e continuità fra esplorazione, congettura e giustificazione.

- Quinto passo (Giustificazione)

Le figure vengono stirate del doppio in orizzontale perché la guida non si trova sulla diagonale del rombo, ma sulla metà delle aste.

È importante notare che, mentre per il pantografo per la simmetria assiale sono stati necessari quasi tre incontri (circa 9 ore), l'esplorazione del pantografo di Delunay ha richiesto un solo incontro (3 ore). Gli studenti avevano ormai acquisito la manualità necessaria al disegno delle figure, gli schemi d'uso: saper usare puntatore e tracciatore, scelta della figure da disegnare (segmenti perpendicolari e segmenti paralleli alla guida), figure geometriche regolari (cerchio e quadrato) e figure irregolari (lettere o disegni personali) e la strategia esplorativa.

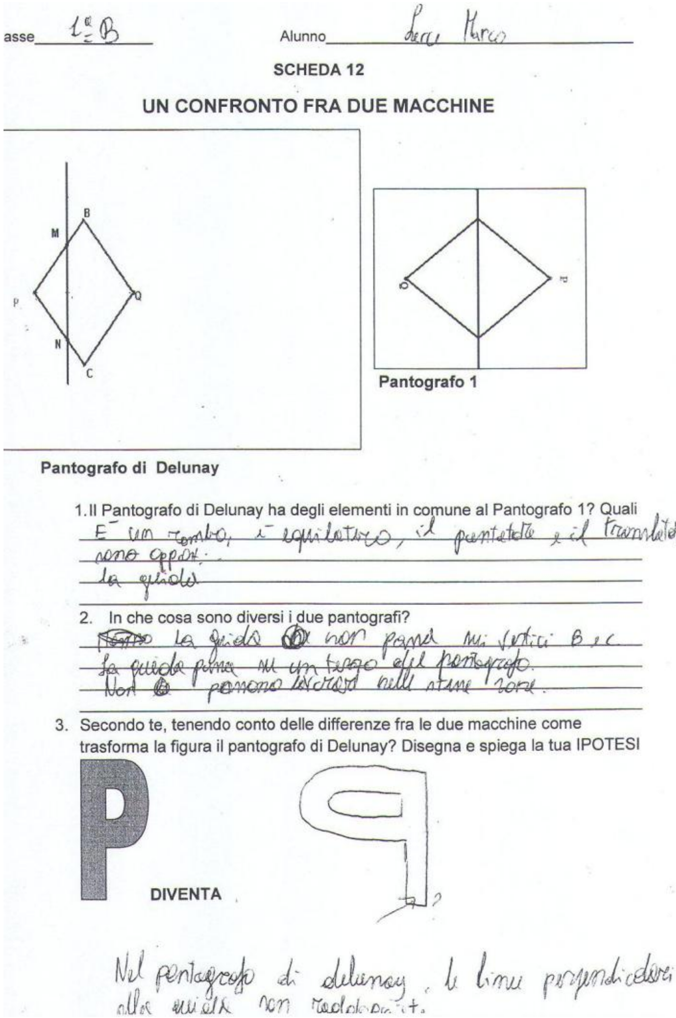
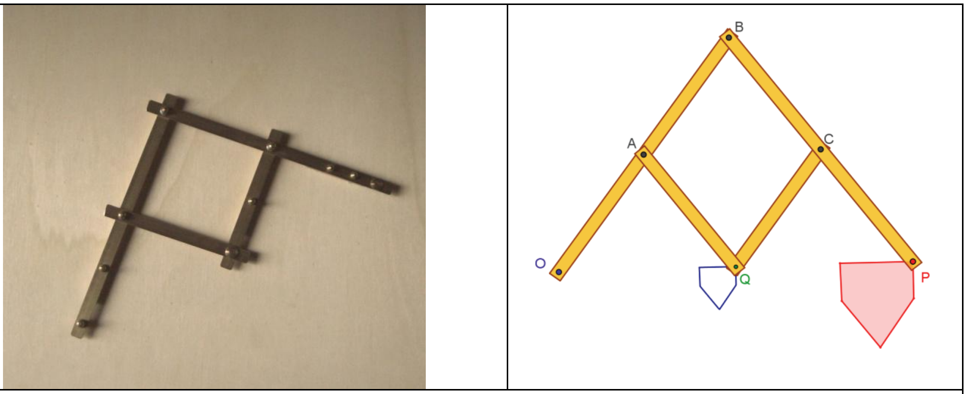


Figura 15 – La congettura di Marco

11.3.1 Il pantografo per l'omotetia (Scheiner)

Il pantografo di Scheiner (Fig. 16) è sicuramente il più noto dei tre pantografi scelti per la sperimentazione, è anche conosciuto come "Il pantografo". La struttura è profondamente diversa dalle altre due macchine: un solo punto vincolato al piano e nessuna guida:



Il pantografo è costituito da quattro aste rigide incernierate nei punti A, B, C e Q scelti in modo da formare un parallelogramma (in questo caso un rombo). Il punto O è fissato al piano su cui il meccanismo si muove. Il punto P, sull'asta BC, è scelto in modo tale che risulti: $BP/BC = OB/OA = k$

(in questo caso $k = 2$)

Per come sono incernierate le aste, i punti O, Q e P rimangono allineati durante la deformazione del sistema e risulta sempre $OP = k \cdot OQ$ (visto che i triangoli OBP e OAQ sono simili). Quindi Q e P si corrispondono in un'omotetia di centro O. Considerando P come corrispondente di Q avremo il rapporto di omotetia $k = OP/OQ > 1$. Se, invece, si considera Q corrispondente di P, avremo come rapporto di omotetia $1/k = OQ/OP < 1$

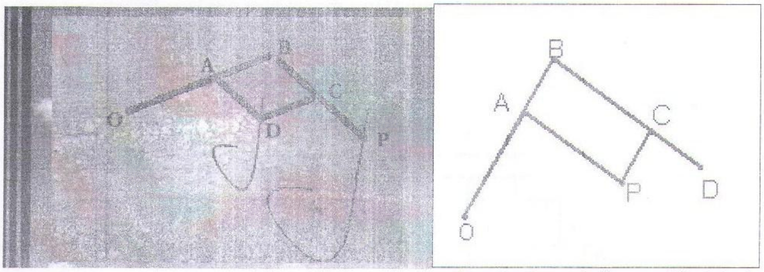
Figura 16 - Il pantografo di Scheiner

Nel percorso progettato era prevista un'esplorazione guidata da schede, come negli altri due casi, ma considerato che gli studenti si stavano appassionando alle attività e che avevano già esplorato due macchine guidati da schede, ho deciso di dare loro il pantografo di Scheiner senza guida per verificare se rispettavano autonomamente le tappe previste nell'esplorazione. L'unica richiesta era una relazione scritta sul pantografo di Scheiner (Fig. 17).

RELAZIONE: *IL PANTOGRAFO di SCHEINER*

GRUPPO N° 3

Pirelli Giulia, Pirelli Claudia, Remo Flavia, Bozzacino Federica, Benedetto Alessandra.



Questo shema è diverso dll'originale

L'obiettivo è quello di costruire il pantografo di Scheiner. Per fare questo dovete esplorarlo come abbiamo fatto con gli altri pantografi.
Dovrete tener conto di questi aspetti
1. COME E' FATTO IL PANTOGRAFO DI SCHEINER?
2. COSA FA IL PANTOGRAFO DI SCHEINER?
3. PERCHE'?

Scrivete con cura tutte le vostre osservazione e fate i disegni delle trasformazioni ottenute

Figura 17 - La relazione

Vale la pena trascrivere le cinque relazioni per vedere i diversi approcci (in appendice i protocolli originali).

Gruppo 1

Il pantografo di Scheiner è formato da 4 aste, 2 grandi e 2piccole. Ha un solo punto imprigionato e 5 liberi. Il segmento con il tracciatore sono paralleli. Il puntatore sta sull'asta piccola, mentre il tracciatore sta sull'asta grande.
Il tracciatore non può disegnare nel punto destro alto e non può neanche intorno al punto imprigionato. La macchina si differenzia dalle altre due perché non ha la guida. Unendo il punto imprigionato al puntatore ed al tracciatore con una linea immaginaria si notano 3 triangoli isosceli. Il primo comprende gli altri due triangoli e un rombo. La macchina nel caso che il tracciatore si trova sull'asta più grande disegna la figura il doppio sia nella perpendicolarità sia nella parallelità. Se invece il tracciatore è sull'asta piccola il disegno viene ½ della figura originale. Un'altra differenza è che la figura non viene specchiata. Per fare l'immagine il triplo basta aggiungere alle aste più grandi la misura della metà, oppure dividere per due le aste più piccole. La figura viene il doppio perché viene proiettata. (Antonio, Gaetano, Giacomo, Gianluca, Giovanni) (Fig. 18).

Figura 18 - Il pantografo del Gruppo 1

L'esplorazione è rispettata nei suoi punti fondamentali, gli studenti di questo gruppo immaginano anche di modificare il pantografo cambiando il rapporto di omotetia. Non riescono però a collegare le proprietà della trasformazione incorporate nella struttura geometrica (allineamento dei tre punti) con i prodotti della macchina.

Gruppo 2

Il pantografo di Scheiner è una macchina geometrica. Questa macchina non ha una guida ed è fissata a un piano da un solo punto O. È formata da 4 aste di cui due sono corte e due sono lunghe. Le due aste sono fissate a metà di quelle lunghe attraverso dei bulloni. La macchina è simile a un compasso capace di arrivare in queste zone: il punto P può arrivare solo nel piano a, mentre il punto D può arrivare solo nel piano b e nel piano c (Fig. 19).

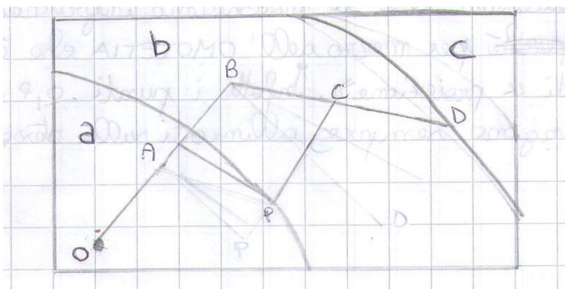


Figura 19 - Zone limite del pantografo di Scheiner

Se tracciamo una linea immaginaria che parte dal punto O e arriva al punto d formiamo un triangolo diviso in due triangoli e un rombo (Fig. 20).

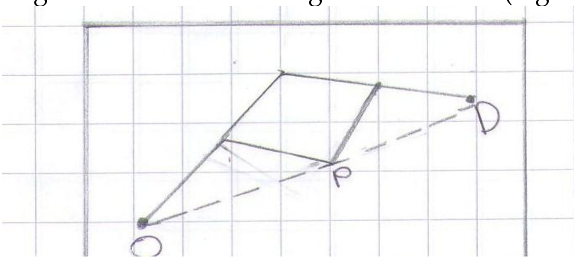


Figura 20 - La linea immaginaria

La macchina secondo noi, è capace di ingrandire le figure disegnate nella parte a del piano. Infatti tracciando un segmento di 5 cm nella parte a del piano lo riproduce nella parte b il doppio. […] Anche tracciando un quadrato con il lato di 2 cm otteniamo un quadrato con il lato di 4 cm. Inoltre anche tracciando una lettera o un numero a piacere la macchina le ingrandisce. Infine diciamo che la macchina ingrandisce le figure per mezzo dell'OMOTETIA [chiedono all'insegnante come si chiama questa trasformazione] che è una specie di proiezione. Infatti i punti O, P, e D rimangono sempre allineati sulla stessa retta. (Federica L., Caterina, Tania, Grazia, Pasquale P., Pasquale C., Maria Grazia).

Gli studenti del gruppo 2 sono capaci di produrre un'esplorazione completa, analizzando anche le zone limite del pantografo e individuando l'analogia con il compasso. Questo gruppo è in grado di connettere con argomentazioni pertinenti il prodotto della macchina, un'omotetia, con le sue proprietà geometriche (allineamento dei tre punti).

Gruppo 3

Come è fatto il pantografo di Scheiner? È formato da 3 aste e da p punti liberi a da un punto imprigionato. Non ha la guida e assomiglia a un compasso perché parte da un punto e girando fa circonferenze.

Cosa fa? Se prendiamo il primo puntatore e il secondo tracciatore verrà fuori un disegno più grande. Invece se prendiamo il primo tracciatore e il secondo puntatore verrà fuori un disegno che farà vedere la metà del disegno.

Perché? Il tracciatore disegna il doppio perché è più lontano dal punto imprigionato, quindi fa le cose il doppio. Il tracciatore che è più vicino al punto imprigionato fa le cose a metà (Fig. 21). (Francesco, Carmen, Valentina).

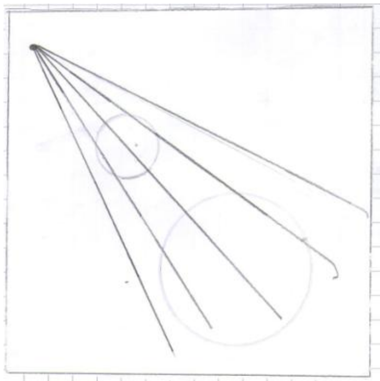


Figura 21 - Il centro di omotetia

Questi studenti ripercorrono esattamente, e un po' pedissequamente, l'esplorazione riscrivendosi le domande chiave; l'argomentazione utilizzata (vicinanza del tracciatore dal punto fisso) non fa riferimento esplicito alle proprietà geometriche che consentono l'omotetia.

Gruppo 4

Nel pantografo di Scheiner abbiamo due aste lunghe e due aste lunghe la metà. La loro unione al centro forma un rombo mobile simile a quello dei pantografi precedenti. C'è un'asta lunga 21 cm che è fissata da un perno al suo vertice poi legata a quest'ultima c'è un'altra asta lunga 21 cm e poi alle mediane di queste due ce ne sono altre due, segmenti lunghi 10,5 cm che a loro volta si intersecano nel punto d. Quest'ultimo ha un foro, insieme anche a P, che all'utilità di un tracciatore o di un puntatore. Il pantografo di Scheiner come quello di Delunay trasforma le figure raddoppiandole quando si posiziona la mina sul vertice D e come quello di Delunay se la mina viene posta sul vertice P viene rimpicciolita. Il pantografo di Scheiner è stato studiato da noi ragazzi e abbiamo rinvenuto questo schema (Fig. 22).

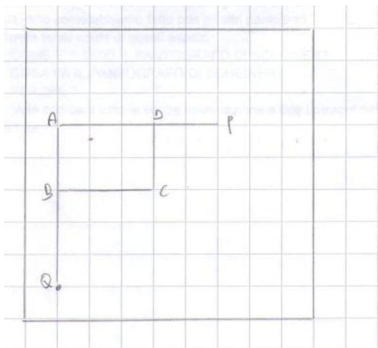


Figura 22 - Disegno del pantografo di Scheiner

Questo pantografo è stato ideato da noi ragazzi e ha la funzione di trasformare nel triplo o nel terzo (a seconda di dov'è la mina) l'immagine iniziale. (Riccardo, Leo, Antonio P. , Emanuele, Marco, Sadmir).

Questi ragazzi sembrano non cogliere le differenze con la trasformazione prodotta dal pantografo di Delunay, nonostante la descrizione accurata dell'artefatto. Anche l'esplorazione non è completa, si limita all'analisi dell'artefatto e il passaggio allo strumento è confuso. Riescono però ad immaginare un pantografo modificato per disegnare un'omotetia di rapporto 1:3.

Gruppo 5

Il pantografo di Scheiner ha una struttura piuttosto complessa. Rispetto agli altri pantografi analizzati negli ultimi giorni, questo presenta alcune differenze: non ha la guida, ha un solo punto imprigionato e 5 liberi, le 4 aste sono congruenti a due a due.

Sulla macchina abbiamo posizionato due fogli di carta con del nastro adesivo in modo da ricoprire tutto il piano sul quale dobbiamo disegnare. Abbiamo tracciato una lettera. Dopo aver riportato la figura con il tracciatore abbiamo notato che la lettera era il doppio di quella iniziale, poi abbiamo invertito il tracciatore con il puntatore e accadeva la cosa contraria, cioè disegnando una lettera ne abbiamo ottenuta un'altra dimezzata. Abbiamo poi unito i punti della lettera iniziale al punto imprigionato della macchina (centro) e abbiamo formato una specie di raggio. Questa trasformazione si chiama omotetia [viene chiesto il termine all'insegnante]. L'omotetia avviene perché la misura di un'asta minore viene riportata due volte sull'asta maggiore che ha tutti i punti liberi. La macchina ingrandisce per via della sua struttura: infatti quando noi puntiamo una figura l'asta minore riporta la misura dimezzata. Se volessimo riportare il triplo non dovremmo fare altro che sostituire al quadrato centrale il parallelogramma come illustrato nel disegno (Fig. 23). (Giulia, Claudia, Flavia, Federica B., Alessandra).

In questo gruppo l'esplorazione è completa, il passaggio dall'artefatto allo strumento è esplicito. Interessante l'argomentazione che prende in esame il rapporto fra le aste, ma non coglie l'allineamento, nonostante lo stratagemma ingegnoso di aver connesso i punti delle figure trasformate con quelli della figura originale.

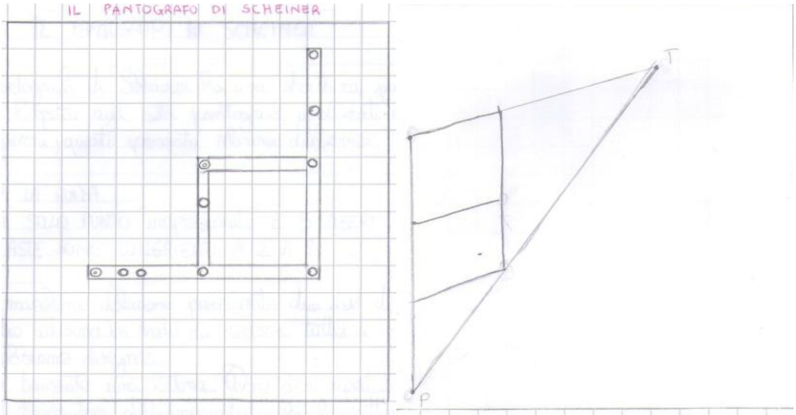


Figura 23 - Le variazioni al pantografo di Scheiner

In generale possiamo dire che l'idea di lasciare libera l'esplorazione si è rivelata preziosa perché ha messo in luce l'acquisizione da parte dei ragazzi della strategia esplorativa della macchina secondo i criteri stabiliti e appresi nelle esplorazioni precedenti e in diversi casi i ragazzi sono riusciti a sviluppare argomentazioni utili a spiegare perché la macchina produca un'omotetia.

Un problema inaspettato che ha messo in luce una proprietà geometrica fondamentale del pantografo di Scheiner è sorto grazie a un errore prodotto da alcuni studenti. Tre studenti avevano avuto il compito di costruire con un cartone la struttura del pantografo di Scheiner modificata per disegnare un'omotetia di rapporto 1:3. Hanno preso tutte le misure opportune e ritagliato i pezzi del cartone per la costruzione del nuovo sistema articolato. Infine hanno presentato il loro prodotto alla classe (Fig. 24).

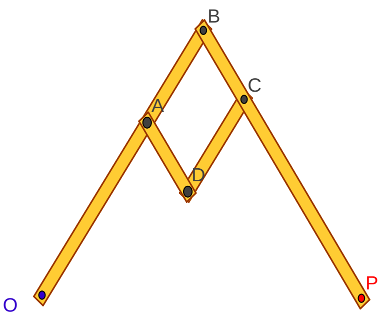


Figura 24 - Il pantografo sbagliato

È stata un'occasione per proporre ai ragazzi una situazione di problem solving che mettesse in luce le caratteristiche geometriche del pantografo di Scheiner:

Questo pantografo costruito dai compagni non può funzionare. Perché?

Ad una prima occhiata la struttura sembra ben fatta e l'idea di porre il punto A ad un terzo dell'asta per avere un pantografo che disegna un'omotetia di rapporto 1 : 3 è corretta. Tuttavia una delle condizioni non viene rispettata: i punti O, D, P non sono allineati. È stata una buona occasione per evidenziare una delle due proprietà che consentono al pantografo di disegnare un'omotetia. In questo caso il parallelismo fra i lati opposti del quadrilatero ABCD è rispettato, ma viene a mancare l'allineamento di O, D, P. Di fronte a questo artefatto 'casalingo' gli studenti si sono subito accorti dell'errore, notando anche che in alcuni casi nella relazione non avevano messo in evidenza questo elemento.

Dopo questa attività la verifica finale (scoprire quale macchina produce una certa trasformazione) si è rivelata banale e poco significativa. In realtà la verifica più significativa è risultata l'esplorazione autonoma del pantografo di Scheiner e la relazione prodotta dagli studenti.

11.3.5. Riflessioni

L'ipotesi di lavoro sottesa a questo esperimento didattico viene confermata in pieno: l'attività esplorativa sulle macchine matematiche favorisce lo sviluppo di processi argomentativi, in misura anche superiore alle aspettative. Infatti non mi aspettavo che nei due pantografi per le trasformazioni non isometriche (Delunay e Scheiner) i ragazzi cogliessero il legame fra la trasformazione prodotta e le proprietà geometriche incorporate nella macchina. Un altro elemento che si è rivelato importante è l'acquisizione della strategia esplorativa di una macchina matematica (*Come è fatta? Cosa fa? Perché? Cosa succederebbe se...?*), quindi la conferma, utile per altri esperimenti didattici, della significatività delle domande chiave. Infine il percorso didattico ipotizzato su questi tre pantografi che portavano al passaggio da una trasformazione isometrica a trasformazioni non isometriche sicuramente inusuali alla scuola media si è rivelato interessante dal punto di vista delle attività matematiche in gioco, in quanto la mancanza di conoscenze pregresse non ha costituito un ostacolo alla produzione di congetture e ipotesi argomentate.

Capitolo dodicesimo
Le sperimentazioni nel progetto MMLab-ER

12.1. Introduzione

Il progetto MMLab-ER ha coinvolto nelle sperimentazioni quasi tutti i docenti che hanno partecipato alla formazione, era del resto una delle condizioni poste agli insegnanti per la partecipazione al progetto. Nelle tabelle seguenti sono riportati alcuni dati riguardanti la struttura delle sperimentazioni sulle macchine matematiche del Progetto[58].

Provincia	*Ist. compr., scuole primarie e sec. I gr.*	*Licei e istituti magistrali*	*Istituti tecnici, prof.li, IIS, ISISS*	*Totale*
Bologna	12	0	3	15
Modena	8	2	2	12
Piacenza	5	4	2	11
Ravenna	8	2	2	12
Rimini	8	2	5	15
Totale	*41*	*10*	*14*	*65*

Tabella 1 - Istituti scolastici coinvolti nel biennio 2008-2010, per provincia e tipologia.

Nel report finale del Progetto (Martignone, 2010) sono stati riportati i resoconti di alcune sperimentazioni tenendo conto della distribuzione territoriale, dell'ordine di scuola in cui la sperimentazione si è effettuata e della tipologia di macchina matematica utilizzata nella sperimentazione. Il numero di alunni e insegnanti coinvolti è stato notevole, come si evince dalla tabella sotto riportata.

Provincia	*Numero di sperimentazioni*	*Numero studenti coinvolti*
Bologna	20	500
Modena	18	450
Piacenza*	18	760
Ravenna	16	450
Rimini	7	175
Totale	*79*	*2.335*

Tabella 2 - Numero di sperimentazioni realizzate e studenti coinvolti, per provincia

[58] Il report è on-line al seguente indirizzo: *http://www.mmlab.unimore.it/onlne/Home/ProgettoRegionaleEmiliaRomagna/RisultatidelProgetto/LibroProgettoregionale/documento10016366.html*)

Provincia	*Scuola*	*Macchine matematiche*	*Contenuti matematici*
Bologna	Primaria	Compasso e pantografo per la simmetria assiale	Proprietà e costruzione di poligoni
	Sec. di I grado	Riga e compasso	Costruzioni con riga e compasso
	Sec. di II grado	Pantografo di Scheiner	Proporzionalità e similitudine
Modena	Primaria	Pascalina	Sistema numerico decimale
	Sec. di I grado	Pantografi per la simmetria assiale e stiramento	Dalla simmetria assiale allo stiramento
Piacenza	Sec. di I grado	Pantografo di Scheiner	Trasformazioni omotetiche
	Sec. di II grado	Pantografo per la simmetria assiale	Simmetria assiale
Ravenna	Sec. di I grado	Pantografi per la simmetria centrale e di Scheiner	Dalla simmetria centrale all'omotetia
	Sec. di II grado	Parabolografi ed ellissografi	Le coniche
Rimini	Sec. di I grado	Pantografi per le isometrie	Simmetria assiale, centrale, rotazione, traslazione
	Sec. di II grado	Ellissografi a filo e articolati	Ellisse

Tabella 3 - Macchine matematiche e contenuti matematici

12.2. Gli strumenti per la sperimentazione

Per la sperimentazione nelle classi sono stati utilizzati essenzialmente due strumenti principali: il diario di bordo e il report finale. Per quanto riguarda il primo, questo aveva lo scopo di rendere esplicito passo per passo ciò che avveniva in classe, raccogliere prodotti degli allievi utili per rendicontare e riflettere su quanto avveniva in classe. Rappresenta una ricchezza importante ai fini della rendicontazione del progetto, uno strumento di confronto fra i docenti, un utile riferimento per la riproducibilità delle sperimentazioni.

Il report finale, invece, aveva lo scopo di riflettere e rendicontare a posteriori il senso della sperimentazione. Alcuni di questi report finali, redatti secondo un format comune, sono stati pubblicati nel report finale del progetto (Martignone, 2010, pp. 106-201).

12.3. Alcuni esempi di sperimentazioni nel progetto MMLab-ER

In questo paragrafo verranno prese in esame alcune sperimentazioni dalle classi del progetto in relazione a percorsi didattici verticali dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado, per mettere in luce la flessibilità delle macchine matematiche e alcuni aspetti relativi al laboratorio di matematica che sono comuni ai diversi ordini di scuola.

12.3.1. Il compasso dalla scuola primaria alla secondaria di II grado

Consideriamo un problema assegnato su un foglio da disegno su cui è tracciato un segmento: "Costruire con riga e compasso un triangolo equilatero con un lato assegnato". Questo problema ha una storia illustre, poiché è la I proposizione del Primo Libro degli Elementi di Euclide. La costruzione è là descritta in questo modo:

Il segmento dato è AB.
Tracciare il cerchio BCD con centro A e raggio AB.
Tracciare il cerchio ACE con centro B e raggio BA.
Tracciare i segmenti CA e CB dal punto C in cui i due cerchi si intersecano.

Nella figura 1 appare a questo punto il triangolo ABC che è 'percettivamente' equilatero. Ma il testo di Euclide prosegue dimostrando la validità della costruzione sulla base di definizioni (la definizione di cerchio), di postulati (tracciare un segmento tra due punti dati; tracciare un cerchio con centro e raggio dati), di nozioni comuni (l'uguaglianza di due cose uguali a una terza, che oggi chiamiamo anche proprietà transitiva).

Poiché A è il centro del cerchio CDB, AC è uguale ad AB.
Poiché B è il centro del cerchio CAE, BC è uguale a BA.
Dunque CA e CB sono uguali ad AB.
Per la proprietà transitiva, CA è uguale a CB.
Dunque CA, AB, BC sono uguali tra loro e il triangolo ABC è equilatero. CVD.

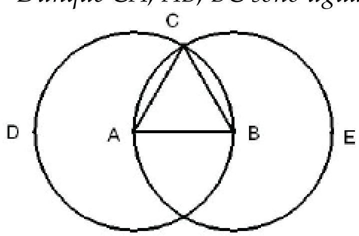


Figura 1 - Costruzione di Euclide

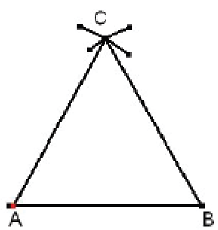


Figura 2 - Una costruzione nel disegno tecnico

Questo ragionamento si appoggia sull'uso del compasso e della riga. In particolare il compasso è usato non per tracciare una forma 'rotonda' ma per trovare un punto (C) a una data distanza dai punti A e B. Si tratta così di un uso 'teorico' del compasso, che allude da un lato alla consegna contenuta nel testo del problema e dall'altro alle proprietà caratteristiche del cerchio. Molto spesso gli studenti (e non solo in Italia) imparano meccanicamente a eseguire la costruzione seguendo le istruzioni che compaiono nei libri di disegno tecnico (Fig. 2) e tracciano due piccoli archi che consentono di individuare il punto C ma che non evocano visivamente la loro genesi come archi di cerchio. A volte gli studenti non capiscono neppure perché l'insegnante di matematica non si accontenti di questa soluzione grafica che produce un triangolo equilatero e insista a chiedere loro di giustificare i vari passi della costruzione. Gli studenti si accontenterebbero dell'evidenza percettiva, ignorando la necessità della dimostrazione. È proprio nella necessità della dimostrazione in matematica che sta la differenza tra lo stile di pensiero della vita quotidiana e lo stile di pensiero matematico (Bartolini Bussi, 2010, pp. 42-43).

Scuola primaria, classe IV, Docente I. Ferrari

L'attività con il compasso inizia con l'esplorazione della macchina come previsto dallo schema esplorativo discusso in fase di formazione (*Come è fatto? Cosa fa? Perché lo fa?*). Dal diario di bordo dell'insegnante abbiamo le motivazioni che guidano l'azione dell'insegnante:

Si vogliono evidenziare le caratteristiche della macchina matematica: come è fatta la macchina, che cosa fa la macchina e perché lo fa; dando alcuni accenni al significato di cerchio. In quest'occasione i bambini entrano per la prima volta in contatto con lo strumento compasso, forse l'hanno visto usare, ma è la prima volta che lo tengono in mano gestendone i movimenti. Inizialmente, si sono soffermati molto a guardare la struttura del compasso, i singoli ingranaggi 'le rotelline', rimanendo così fortemente legati all'oggetto, poi pian piano attraverso la scheda di lavoro sono riusciti anche a descrivere il come usarlo e a spiegare a cosa serviva. Per caso, i bambini hanno portato a scuola diversi tipi di compasso (compasso normale, balaustrone e bilancino), ed è stato molto interessante perché si sono potute fare diverse considerazioni sulle diverse fattezze, sui loro diversi limiti, ad es. il balaustrone e il bilancino sono più precisi dato che è la rotella in mezzo a determinare l'ampiezza bloccando le aste. Il compasso di contro riesce a fare cerchi più grandi. (Ferrari, 2010a, p. 17).

I bambini descrivono e disegnano il compasso soffermandosi sulle sue caratteristiche; è interessante notare che spesso i bambini in modo naturale collegano le caratteristiche fisiche dell'artefatto con le sue funzioni (strumento).

Eri: Il compasso serve per fare dei cerchi con precisione. Il compasso è formato da quattro rotelline: due rotelline sono ai fianchi e servono per smontare i pezzi finali invece le altre al centro servono per regolare la lunghezza delle mine. Le mine servono: una per scrivere e l'altra per tenere fermo il foglio.

Da: il compasso forma degli angoli ottusi e acuti, viene usato per formare cerchi, si può smontare, ha un ago che tiene fermo il foglio e una mina per formare il cerchio ed è di ferro.

Sal: il compasso è munito di un perno collegato a due aste di metallo. Queste aste sono munite di un ago e di una mina per disegnare cerchi.

Ma: il compasso ha due lunghe aste, una era piccola e l'altra era lunga. In una c'era una matitina e nell'altra c'era un piccolo ago.

Pe: il compasso è usato per fare cerchi di diverse misure. Le misure si fanno con il righello. Il compasso è formato da due aste di ferro. La prima asta ha una punta di ago. La seconda asta ha una punta di matita, la punta dell'ago si mette su un foglio e fai il cerchio con la punta di matita.

Mi: il compasso è una macchina matematica formata da due aste che si possono allontanare ed avvicinare a seconda dell'ampiezza della figura. Sull'estremità di un'asta c'è una punta di matita e sull'altra estremità c'è una punta di ferro usata come perno. (Ferrari, 2010a, p. 18).

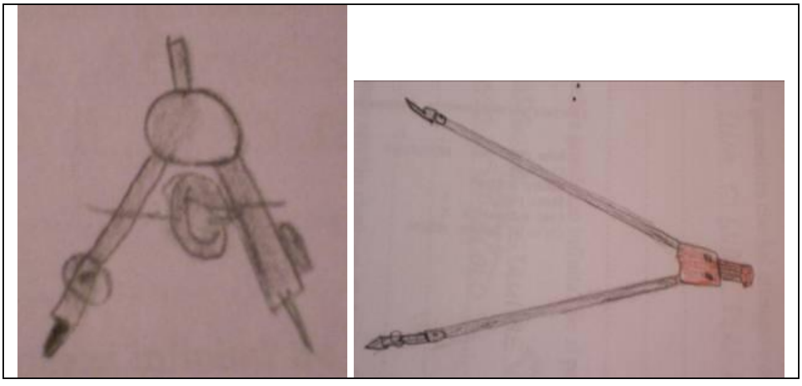


Figura 3 - Il compasso disegnato

L'insegnante è piacevolmente colpita dalle riflessioni e osservazioni che i bambini riescono a fare circa questa prima parte dell'esperienza:

Segnalo che i bambini non avevano mai usato il compasso, l'avevano visto usare, ma era forse la prima volta che lo tenevano in mano. Si sono molto soffermati a guardare la struttura del compasso, i singoli ingranaggi, 'le rotelline'. I loro disegni pertanto sono proprio 'oggettuali', come si può vedere da alcuni che ho inserito, mentre le loro descrizioni per la maggiore parte descrivono l'oggetto, ma anche il come usarlo e a cosa serve il compasso. Mi piace l'inizio di Da *il compasso forma degli angoli ottusi e acuti, viene usato per formare cerchi:* lui si ferma a pensare all'ampiezza delle aste, avrei potuto in seguito collegare questa osservazione al disegno: se l'ampiezza delle aste è un angolo acuto cosa accade? Se è ottuso? (Ferrari, 2010a, p. 18).

L'attività prosegue sulle caratteristiche geometriche del cerchio e poi in una fase successiva si passa alla costruzione con il compasso di triangoli. La prima costruzione è guidata dall'insegnante, la seconda costruzione richiesta viene data per 3 lati che hanno misure incompatibili con la costruzione del triangolo. L'obiettivo è evidentemente quello di far cogliere che dati tre lati non sempre è possibile costruire un triangolo perché la somma di due lati deve sempre essere maggiore del terzo (disuguaglianza triangolare). Ai ragazzi viene richiesto di descrivere passo dopo passo la loro costruzione. Nel report finale l'insegnante descrive in questo modo l'esperienza realizzata:

In una didattica laboratoriale il docente diviene progettista di ambienti di apprendimento, costruiti intenzionalmente per consentire percorsi attivi e consapevoli in cui lo studente sia orientato, ma non diretto. Il laboratorio ha una forte struttura, ma presenta esperienze polisemiche che non hanno un'unica strada d'approccio e che offrono quindi la possibilità d'azione a bambini di diverso livello cognitivo e con conoscenze individualmente diversificate. Gli adulti seguono le discussioni e le attività sperimentali intervenendo per sollecitare spiegazioni e interventi, per introdurre nuovi strumenti e contenuti; alla spiegazione e all'interrogazione si sostituisce un dialogo finalizzato ad una progressiva conquista di autonomia e fiducia nelle proprie capacità d'apprendimento da parte dell'alunno. In un contesto di questo genere, il ruolo dell'adulto non è facile da gestire richiede una competenza di tipo professionale che va acquisita con il tempo. L'insegnante deve fare attenzione ai modi di elaborazione dell'informazione, all'impostazione delle domande e alla rimessa in circolo di aspetti importanti che non hanno ricevuto abbastanza attenzione da parte degli interlocutori. Non deve affrettarsi a fornire risposte, né a risolvere il problema in discussioni corrette sul piano oggettivo, senza tenere conto di quello che è veramente comprensibile agli alunni. Nel laboratorio non manca l'uso di diversi strumenti (come le macchine matematiche) come mediatori per tenere attiva l'attenzione, per favorire l'apprendimento di ciascun bambino. Fondamentale, inoltre, risulta essere l'esplorazione di questi strumenti poiché per utilizzare uno strumento correttamente è necessario conoscere la struttura, le regole e darsi di esse una giustificazione. (Ferrari, 2010b, pp. 122-127).

Scuola sec. di I grado, classe I. Docenti: F. Buonomo, S. Ferretti, F. Postal

Nella sperimentazione di questi docenti si sono prese in esame le costruzioni con la riga e il compasso. Si tratta in genere di attività che non si svolgono in una classe prima perché sono o demandate al docente di tecnologia oppure argomento di terza quando si tratta il cerchio e la circonferenza. Questi docenti coerentemente con le Indicazioni per il Curricolo 2007 hanno introdotto il tema delle costruzioni geometriche come attività iniziale dell'ambito Spazio e figure.

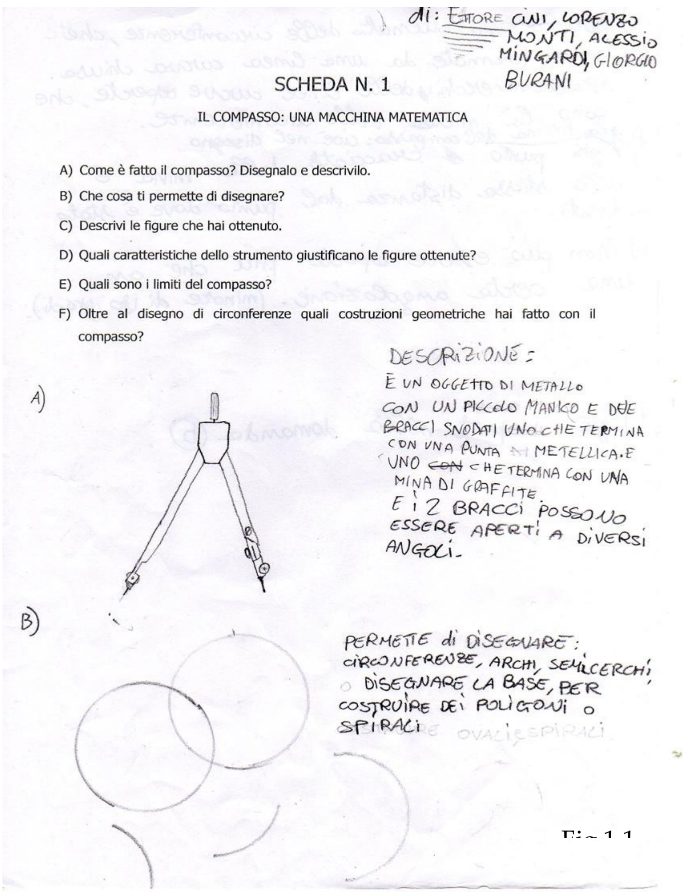
L'esplorazione degli strumenti (riga e compasso) ha seguito lo stesso percorso esplorativo esperito nel corso di formazione e non è sostanzialmente diverso da quello seguito nella scuola primaria nel precedente esempio (Come è fatto? Cosa fa? Perché lo fa?). Le ovvie differenze riguardano gli aspetti matematici in gioco e in particolare la produzione di congetture e l'esplicitazione delle proprietà geometriche utilizzate nelle costruzioni con riga e compasso. È interessante osservare che in queste classi i docenti hanno messo in luce i diversi schemi d'uso del compasso: disegno di circonferenze e trasporto di segmenti.

Attività 1 - Il compasso: una macchina matematica

Gli insegnanti hanno introdotto l'attività da svolgere chiedendo agli alunni di descrivere gli strumenti riga e compasso evidenziandone le caratteristiche essenziali per spiegare le costruzioni geometriche che si possono ottenere. Gli alunni sono apparsi perplessi nell'apprendere che non avrebbero potuto utilizzare le unità di misura riportate sulla riga in uso e che avrebbero dovuto considerarla come una semplice stecca per tracciare dei segmenti. Gli insegnanti hanno spiegato le motivazioni della scelta con una narrazione storica delle prime fasi dello sviluppo della geometria, evidenziando in particolare l'importanza di Euclide per la sistematizzazione delle conoscenze che oggi costituiscono la geometria euclidea.

Le prime definizioni di riga e compasso date dagli allievi sono piuttosto generiche e si limitano a dare informazioni su come sono fatti gli strumenti e su come si maneggiano durante l'uso. Qualcuno propone una descrizione delle figure geometriche prodotte dal compasso, utilizzando però termini sbagliati e confondendo cerchi e circonferenze. Minori difficoltà si sono incontrate nella definizione delle costruzioni geometriche prodotte dalla riga. Per sollecitare la riflessione dei gruppi sulle macchine matematiche utilizzate i docenti hanno proposto agli allievi una scheda in cui si chiedeva inizialmente di disegnare il compasso e poi di rispondere ad alcune domande che avevano lo scopo di far emergere le conoscenze degli allievi sull'uso e sulle proprietà del compasso e delle curve prodotte.

Dopo aver realizzato i disegni,i gruppi sono stati invitati a riferire alla classe i risultati del loro lavoro. Questa fase ha permesso di far emergere e chiarire i dubbi e le misconcezioni degli alunni, in particolare sulla circonferenza e sul cerchio, e di evidenziare l'importanza di un linguaggio corretto per poter rispondere con precisione alle domande contenute nella scheda.


di: ETTORE CINI, LORENZO MONTI, ALESSIO MINGARDI, GIORGIO BURANI

SCHEDA N. 1

IL COMPASSO: UNA MACCHINA MATEMATICA

A) Come è fatto il compasso? Disegnalo e descrivilo.
B) Che cosa ti permette di disegnare?
C) Descrivi le figure che hai ottenuto.
D) Quali caratteristiche dello strumento giustificano le figure ottenute?
E) Quali sono i limiti del compasso?
F) Oltre al disegno di circonferenze quali costruzioni geometriche hai fatto con il compasso?

A)

DESCRIZIONE:
È UN OGGETTO DI METALLO CON UN PICCOLO MANICO E DUE BRACCI SNODATI UNO CHE TERMINA CON UNA PUNTA METELLICA. E UNO ~~CON~~ CHE TERMINA CON UNA MINA DI GRAFFITE E I 2 BRACCI POSSONO ESSERE APERTI A DIVERSI ANGOLI.

B)

PERMETTE di DISEGNARE: CIRCONFERENZE, ARCHI, SEMICERCHI, DISEGNARE LA BASE, PER COSTRUIRE DEI POLIGONI O SPIRALI

Alla fine dell'attività gli alunni condividono una descrizione del compasso e delle caratteristiche delle circonferenze prodotte, dei limiti di utilizzo dello strumento e delle costruzioni geometriche più complesse realizzabili utilizzando riga e compasso.

Testo condiviso - Il compasso è costituito da due aste di uguale lunghezza. Alla base di un'asta c'è un ago (puntatore) per fissare il compasso su una superficie, mentre l'altra asta termina con una punta di grafite (tracciatore). Le due aste sono collegate nella parte superiore da un meccanismo a ruote dentate che permette di aprire e chiudere il compasso e di mantenere costante l'apertura durante la rotazione del tracciatore. Con il compasso disegno circonferenze, linee chiuse semplici, costituite da punti equidistanti dal punto interno, individuato dal puntatore. Questo punto è chiamato centro.

Attività 2 – Trasporto di un segmento

La consegna era di costruire un segmento congruente ad un segmento dato utilizzando riga e compasso.

Molti gruppi hanno eseguito il trasporto puntando il compasso in un estremo con apertura pari al segmento dato e riportando il segmento in un'altra parte del foglio utilizzando come primo estremo il punto del puntatore e come secondo estremo un punto disegnato dal tracciatore (3° modo)

Altri gruppi hanno prima tracciato una retta e fissato un punto su di essa; con apertura pari alla lunghezza del segmento hanno puntato il compasso sul punto scelto e tracciato un arco che interseca la retta in un punto che rappresenta il secondo estremo del segmento. Pochi gruppi hanno utilizzato il segmento dato come raggio di una circonferenza (2° modo).

Due gruppi sono ricorsi a costruzioni più complesse utilizzando ad esempio la costruzione dell'esagono regolare, riconoscendo che con il metodo scelto potevano disegnare più di un segmento congruente a quello dato. Un gruppo ha sfruttato le conoscenze sul metodo di tracciatura della retta perpendicolare ad un segmento in un estremo, elaborando però tali conoscenze in modo personale per giungere alla soluzione del problema assegnato (1° modo).

Durante l'osservazione delle attività svolte, in alcuni gruppi è emersa la difficoltà di coinvolgere tutti i componenti. In alcuni gruppi l'atteggiamento affrettato ha reso spesso impreciso il lavoro prodotto sia nell'esecuzione che nel linguaggio utilizzato. Questa scheda è stata utile per rafforzare il concetto che i punti e gli archi presi in considerazione non sono semplicemente delle tracce per realizzare il disegno ma rappresentano parti delle circonferenze disegnate dal compasso. (Buonomo F., Ferretti S., Postal F., 2010a, pp. 6-8).

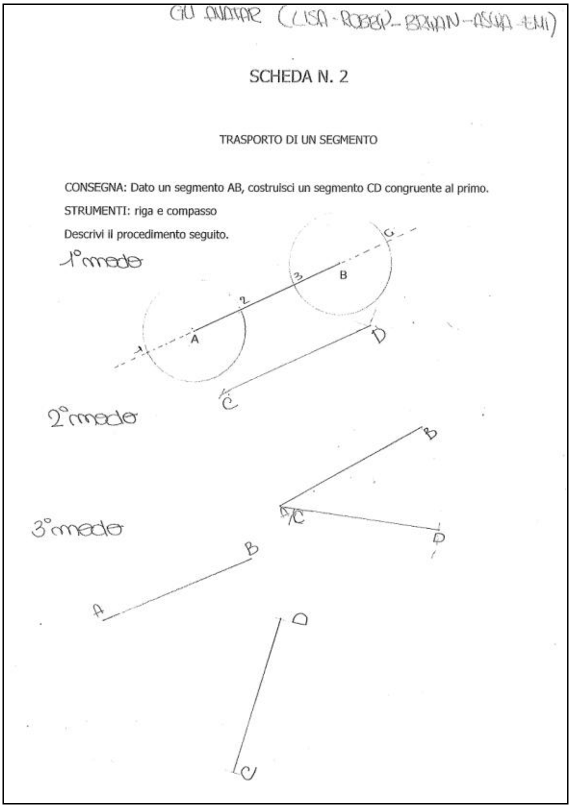


Figura 4 - Il protocollo degli studenti

Come si evince dall'estratto del diario di bordo dei docenti, molta cura è stata data al confronto di strategie di costruzione e alla costruzione di un testo collettivo condiviso dalla classe. Le attività successive hanno riguardato costruzioni geometriche come: la costruzione dell'asse di un segmento, la costruzione di una retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto P non appartenente alla retta data e la costruzione di rette parallele.

Quest'ultima costruzione è interessante perché nella prassi didattica è una costruzione che si effettua con la riga e la squadra utilizzando come proprietà la distanza fra una retta e un punto P non appartenente ad essa, pertanto l'idea di costruirla con squadra e compasso mette in gioco le proprietà dei quadrilateri.

Attività 5 - Rette parallele

La consegna era di disegnare una retta *r* e costruire una retta parallela a *r*, passante per un punto P, non appartenente ad r. In generale i gruppi hanno scelto un punto a caso su *r* e, con apertura pari alla distanza da questo punto al punto P, hanno riportato una serie di circonferenze, i cui punti di intersezione, tra cui il punto P, appartengono alla retta parallela ad *r*, passante per P. La spiegazione di questo procedimento, basata sul riconoscimento delle proprietà dei triangoli isosceli non è stata immediata ed ha richiesto una discussione guidata dall'insegnante che ha fatto riferimento alle conoscenze acquisite fino a quel momento dagli allievi, senza ricorrere a conoscenze pregresse sui quadrilateri parallelogrammi o trapezi di cui non tutti gli alunni erano in possesso (Fig. 5). (Buonomo F., Ferretti S., Postal F., 2010a, p. 10).

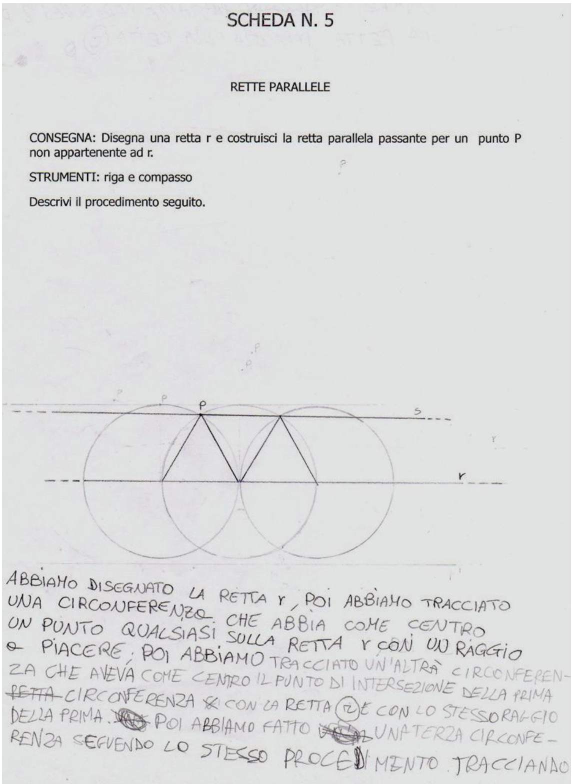


Figura 5 - Il protocollo degli studenti

Dal report finale si riporta la riflessione degli insegnanti sull'intera esperienza:

I ragazzi hanno aderito con entusiasmo alle proposte degli insegnanti rafforzandole loro conoscenze su circonferenze e cerchi e riconoscendo nel compasso non solo uno strumento utile per realizzare i lavori di tecnologia, ma una vera e propria macchina matematica dotata di proprietà in grado di giustificare le caratteristiche delle costruzioni geometriche prodotte. Archi e segni tracciati con il compasso sono stati riconosciuti come parti di circonferenze. I ragazzi sono giunti alla conclusione che molte delle costruzioni geometriche che sono abituati a realizzare sono ottenute utilizzando un gran numero di circonferenze, riconoscendo l'utilità di questa curva in ambiti diversi da quello puramente geometrico. Il linguaggio matematico specifico della geometria è stato migliorato e gli alunni hanno organizzato le loro conoscenze in modo più chiaro, rendendosi conto, durante le fasi di verbalizzazione dei risultati ottenuti, dell'importanza di utilizzare un linguaggio corretto e adeguato all'argomento trattato. Lo spirito di gruppo e la collaborazione tra gli alunni sono stati rafforzati e anche gli alunni più deboli hanno avuto l'occasione di partecipare attivamente al lavoro condiviso da tutta la classe. Le attività hanno risentito però anche di alcune difficoltà, prima fra tutte la scarsità del tempo a disposizione per lo svolgimento del Progetto. Il numero di ore preventivato non è stato adeguato alle necessità. In alcune occasioni è stato necessario affrettare le conclusioni o interrompere le discussioni, che si sono sempre dimostrate proficue. Infine alcuni alunni non sono stati costanti nel portare il materiale necessario allo svolgimento delle attività e questo ha creato talvolta rallentamenti o difficoltà di coinvolgimento di alcuni elementi. (Buonomo, Ferretti, Postal, 2010b, p. 121).

Scuola secondaria di II grado, classe I. Docente: Simone Banchelli

La classe di riferimento è una prima Liceo Scientifico e l'attenzione del docente è prevalentemente rivolta alla produzione di congetture argomentate e alla costruzione di dimostrazioni in campo geometrico. L'attività è come negli altri casi di tipo laboratoriale, i ragazzi sono divisi in gruppi eterogenei e ampio spazio viene dato alla discussione collettiva. Il percorso esplorativo ripercorre le stesse tappe degli esempi precedenti. L'attività inizia con una scheda prettamente matematica dove si chiede di utilizzare il compasso per trasportare segmenti secondo assiomi dati. È evidente che l'obiettivo dell'insegnante è rivolto alla costruzione di elementi teorici della geometria in modo esplicito a differenza degli esempi precedentemente descritti. La prima scheda fornita agli allievi chiede infatti di partire da due assiomi di geometria sul trasposto degli angoli e di realizzarli con riga e compasso (Fig. 6).

(A)

Progetto regionale Scienze e tecnologie
Azione 1- Laboratorio delle macchine matematiche
SPERIMENTAZIONI: COSTRUZIONI con RIGA e COMPASSO

Laboratorio delle Macchine Matematiche

Nome e Cognome	Nome e Cognome	Nome e Cognome
Francesco Giannetti A.	Davide Carolari	

SCHEDA N. 1 - LICEOMALPIGHI (I LS) - A.S. 2009/10

Per svolgere la seguente esercitazione hai a disposizione dei fogli bianchi, una matita, una riga (di cui però dovrai ignorare la scala graduata) e un compasso. Con il tuo compagno di banco cerca di rispondere alle domande che seguono.

1) Tra gli assiomi di congruenza due giocano un ruolo fondamentale:

- trasporto di segmenti
- trasporto di angoli

Dopo averli richiamati alla mente (prova ad enunciarli e a riscriverli) come pensi di poterli realizzare con gli strumenti a tua disposizione ?

- Se abbiamo un segmento $\overline{AB}$ e sempre possibile individuare su una semiretta di origine O il segmento $\overline{OC}$ tale che $\overline{OC} = \overline{AB}$.
- Se abbiamo uno angolo $\hat{AB}$ e' sempre possibile, data la semiretta "c", costruire una semiretta "d" tale che $\hat{cd} = \hat{AB}$

Figura 6 - Scheda predisposta dal docente S. Banchelli

Queste sono le considerazioni teoriche che venivano sollecitate al punto 1. Sempre al punto 1 veniva poi chiesto come 'realizzare' questi assiomi con gli strumenti. Ecco le considerazioni dei ragazzi del Gruppo A.

Per quanto riguarda il trasporto di segmenti si osserva come nella spiegazione data dal gruppo A non vi sia nessun riferimento alla semiretta sulla quale viene 'riportato' il segmento ("*poi riporto la misura data nel piano formando …*"). Accurata la seconda spiegazione relativamente al trasporto di un angolo. Per entrambe le costruzioni non si cita l'uso della riga mentre si fa riferimento a quello del compasso in maniera esplicita per la prima costruzione e implicitamente nella seconda. La proprietà del compasso che mi sembra emergere maggiormente è quella di strumento tracciatore di circonferenze (in verità nel testo dei ragazzi si parla sempre di archi).

Interessante il risultato cui perviene il Gruppo C, per il quale è stato necessario intervenire con una discussione tra me e i due studenti. Nell'eseguire la costruzione del trasporto di un angolo il gruppo decide di utilizzare, per disegnare l'angolo di partenza da trasportare, l'angolo di 60° di una squadra. Questa scelta che apparentemente sembra essere del tutto innocua li condurrà ad una falsa congettura.

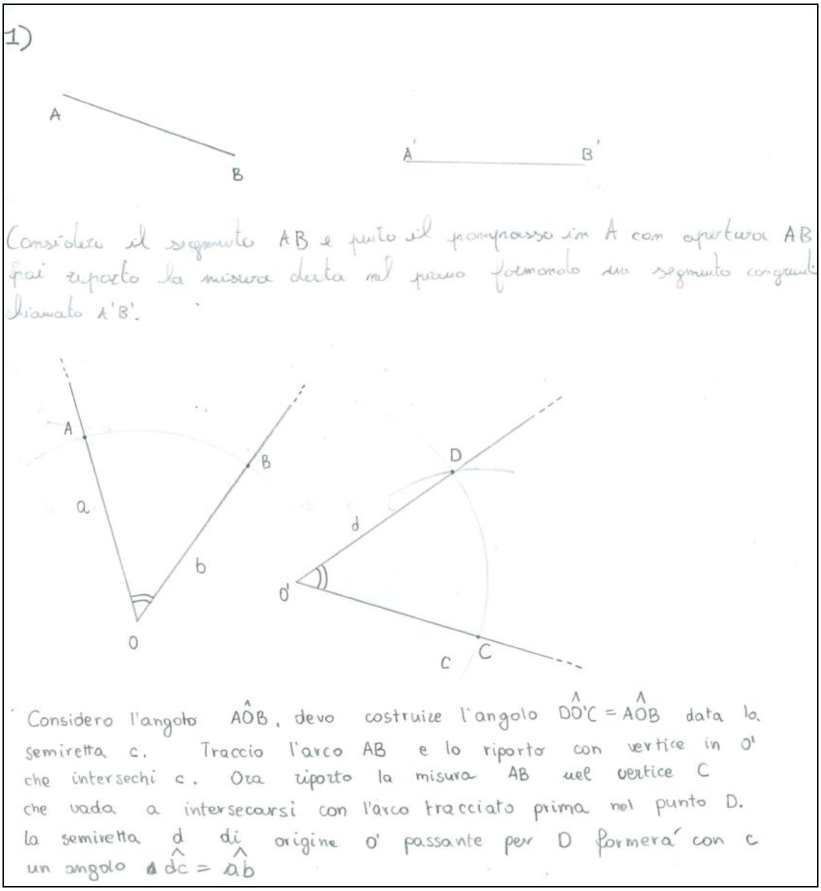


Figura 7 - Il protocollo di uno studente

Nel dialogo con i ragazzi infatti emerge come per loro sia sufficiente:

- puntare in O con apertura a piacere;
- intersecare i lati dell'angolo in A e B;
- tracciare una seconda circonferenza (con stesso raggio della prima) di centro O' che intersechi la semiretta uscente da O' in A';
- mantenendo la stessa apertura determinare il punto B';
- congiungere O' con B'.

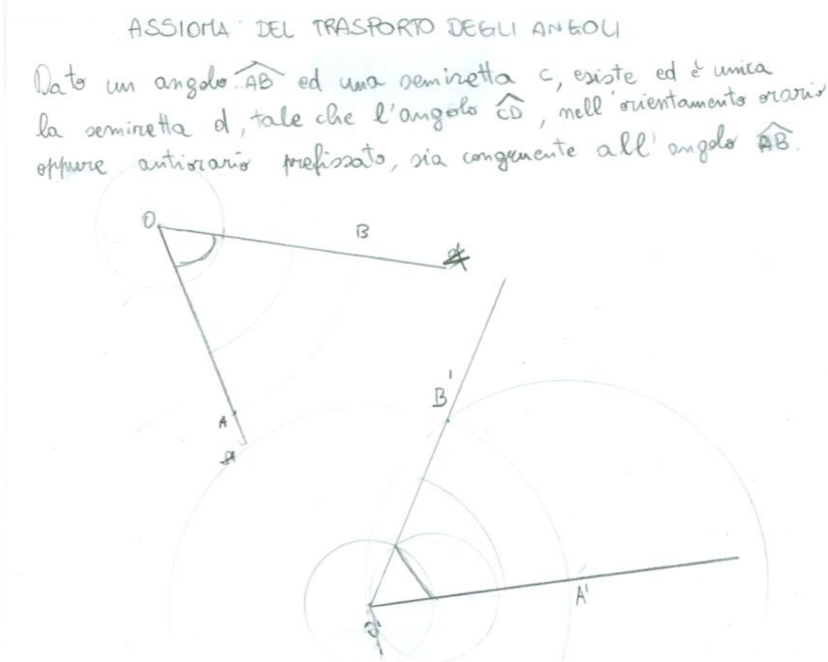


Figura 8 - Il protocollo di uno studente

Non accortisi del caso particolare il gruppo è stato sollecitato ad ripetere la costruzione partendo da un angolo disegnato da me. Mantenere fissa l'apertura del compasso è un caso particolare derivante dall'avere scelto proprio un angolo di 60°. È bastato fare un angolo diverso per rendere consapevoli i ragazzi della particolarità. (Banchelli, 2010, p. 4).

Come si vede da questo esempio l'attenzione del docente è prevalentemente spostata verso la costruzione di dimostrazioni e di un linguaggio matematico. Nelle schede successive il docente chiede ai ragazzi di realizzare costruzioni geometriche con il compasso e di giustificarle teoricamente. Si riporta un solo esempio di costruzione della bisettrice di un angolo e della successiva dimostrazione per dare un'idea delle richieste dell'insegnante (Fig. 9).

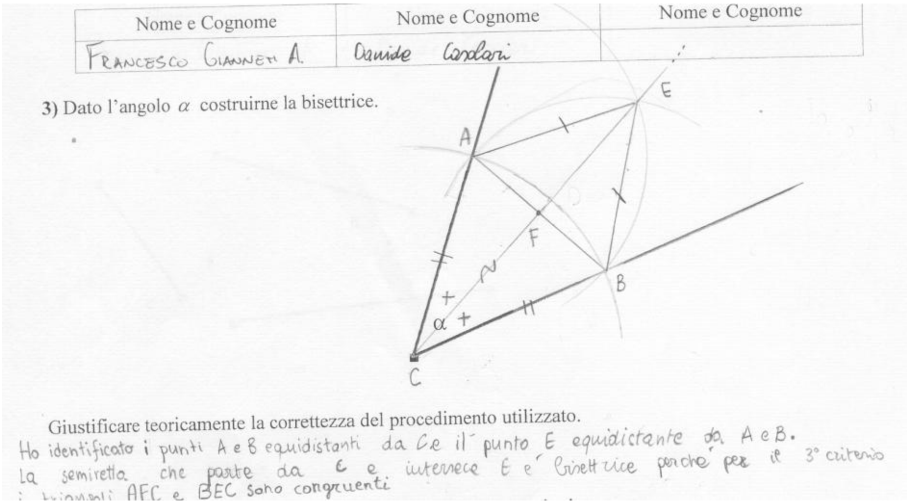


Figura 9 - La costruzione della bisettrice di un angolo

Il diario di bordo del docente è molto accurato, con protocolli degli studenti commentati, e sono rese esplicite le scelte dell'insegnante per quanto riguarda gli obiettivi matematici e cognitivi realizzati. Si riporta il commento finale dell'insegnante:

Risultati positivi: tutti gli studenti coinvolti nella sperimentazione hanno cercato di dare il loro contributo, a prescindere dalle conoscenze possedute o dal livello di maturazione personale; la modalità di somministrazione attraverso schede precostituite ha permesso di ridimensionare il ruolo dell'insegnante in classe quale docente ex cattedra, consentendo un approccio differente alla disciplina, non meno rigoroso ma più condiviso.

Difficoltà: nello svolgere questo tipo di lezioni c'è il rischio che, a causa dei differenti livelli di maturazione dei singoli studenti, non vengano alla luce quelle riflessioni che si intendevano sollecitare in tutti i gruppi: occorre quindi preventivamente cercare di organizzare gruppi eterogenei mescolando gli studenti più motivati con quelli che tendenzialmente tenderebbero a non cogliere le sfide e a non mettersi in gioco; dall'altra parte è opportuno sollecitare riflessioni collettive in cui puntualizzare quelle che si ritengono le conoscenze fondamentali che il lavoro in classe deve lasciare in tutti gli studenti. (Banchelli, 2010, p. 18).

Da questi esempi emerge che l'attività di laboratorio matematico con strumenti noti agli studenti come la riga e il compasso può essere declinata lungo tutto il percorso scolastico e che il tipo di esplorazione sul compasso, come sulle altre macchine matematiche, rappresenta un utile canovaccio in tutte le attività. Gli obiettivi e i contenuti matematici in gioco sono diversi, ma il senso dell'attività matematica è lo stesso.

12.3.2. I pantografi: dalle trasformazioni isometriche a quelle che isometriche non sono

In questo paragrafo si prendono in esame due sperimentazioni, fra le tante a disposizione, realizzate da due docenti di Modena e Bologna con i pantografi per le trasformazioni geometriche nel piano. L'attività si è svolta in classe prima della scuola secondaria di primo grado. La scelta di descrivere queste sperimentazioni come esempio delle sperimentazioni del progetto MMLab-ER è dovuta al fatto che i docenti hanno utilizzato nella sperimentazione pantografi diversi per mettere in luce somiglianze e differenze fra trasformazioni isometriche (simmetria assiale) e trasformazioni non isometriche (stiramento e omotetia). L'aspetto interessante delle attività riguarda la possibilità di discutere e ragionare con gli allievi sul fatto che apparentemente piccole modifiche alla macchina provocano differenze notevoli nelle proprietà delle trasformazioni geometriche realizzate.

Scuola sec. di I Grado "M. Polo" Crevalcore (Bo), classe I. Docente M. Concu

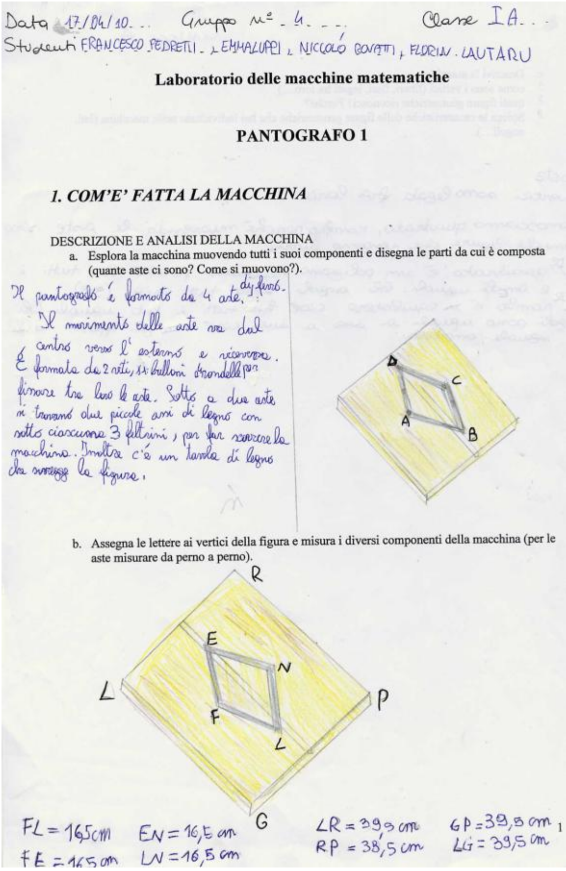
In questa classe i pantografi vengono introdotti con lo scopo di abituare gli allievi a produrre congetture e a giustificare le loro ipotesi. L'esplorazione dei pantografi avviene secondo lo schema consolidato (*Come è fatto? Cosa fa? Perché?*), inoltre viene introdotta un'ulteriore domanda che era stata discussa durante il corso di formazione (*Cosa succederebbe se…?*). Il primo pantografo analizzato è quello per la simmetria assiale; riportiamo il percorso dal diario di bordo dell'insegnante:

Nella prima lezione ho fatto una brevissima descrizione storica delle macchine matematiche, in particolare dei pantografi. Ho suddiviso la classe in piccoli gruppi da 4-5 alunni, il più omogenei possibile e, ad ogni gruppo, ho consegnato la scheda 1 del pantografo 1 da compilare sulla descrizione e il disegno dello strumento e il pantografo per la simmetria assiale. Ho quindi lasciato i ragazzi liberi di manipolare, osservare, esplorare e disegnare.

Nella seconda lezione abbiamo discusso su ciò che i ragazzi avevano prodotto riguardo alla scheda 1, in particolare sul fatto che individuassero nel pantografo rombo e quadrato, come se le due figure non avessero nulla in comune. Analizzando le caratteristiche delle due figure piane, sono arrivati alla conclusione che il quadrato non è altro che un particolare rombo. Dopo la breve discussione consegno la scheda 2 e 3 del pantografo 1 ("Cosa fa la macchina" e "Perché lo fa") e spiego come poter disegnare utilizzando un puntatore e un tracciatore. Alcuni gruppi capiscono perfettamente come usare il pantografo, in particolare un gruppo individua le configurazioni limite ancor prima di iniziare a disegnare. Un altro gruppo invece fatica a trovare le zone limite, cancellando in continuazione ciò che produce. Verso la fine della lezione riprendo un po' gli alunni, perché non tutti lavorano nel gruppo, ma in generale solo 1 o 2 persone su 5 disegnano e scrivono. Per la lezione successiva consegno la scheda 4 del pantografo 1 ("Cosa succederebbe se…?") che i ragazzi dovranno svolgere individualmente. Dovranno cercare di capire se è possibile sostituire al rombo articolato una figura che realizzi la stessa trasformazione. In classe diversi gruppi avevano capito l'importanza, per la simmetria assiale, della perpendicolarità delle diagonali.

Nella terza lezione abbiamo fatto un breve riassunto e conseguente discussione sul biellismo per la simmetria assiale, in particolare sulla scheda 4 che dovevano compilare a casa: nessuno è riuscito a capire che il deltoide può dare una simmetria assiale, se posto in modo tale da avere la stessa distanza dalla scanalatura. Probabilmente avrei dovuto disegnare io il deltoide nelle due posizioni possibili e far scegliere a loro una delle due. (Concu, 2010, p. 2).

Il diario di bordo è inoltre corredato dai protocolli degli studenti:


Data 17/04/10 Gruppo n° 4 Classe IA

Studenti FRANCESCO PEDRETTI, EMMALUPPI, NICCOLÒ BOVATTI, FLORIN LAUTARU

Laboratorio delle macchine matematiche

PANTOGRAFO 1

1. COM'E' FATTA LA MACCHINA

DESCRIZIONE E ANALISI DELLA MACCHINA

a. Esplora la macchina muovendo tutti i suoi componenti e disegna le parti da cui è composta (quante aste ci sono? Come si muovono?).

Il pantografo è formato da 4 aste di ferro. Il movimento delle aste va dal centro verso l'esterno e viceversa. È formata da 2 viti, 4 bulloni, rondelle per fissare tra loro le aste. Sotto a due aste si trovano due piccole assi di legno con sotto ciascuna 3 feltrini, per far scorrere la macchina. Inoltre c'è una tavola di legno che sorregge la figura.

b. Assegna le lettere ai vertici della figura e misura i diversi componenti della macchina (per le aste misurare da perno a perno).

FL = 16,5 cm EN = 16,5 cm LR = 39,5 cm GP = 39,5 cm

FE = 16,5 cm LN = 16,5 cm RP = 38,5 cm LG = 39,5 cm

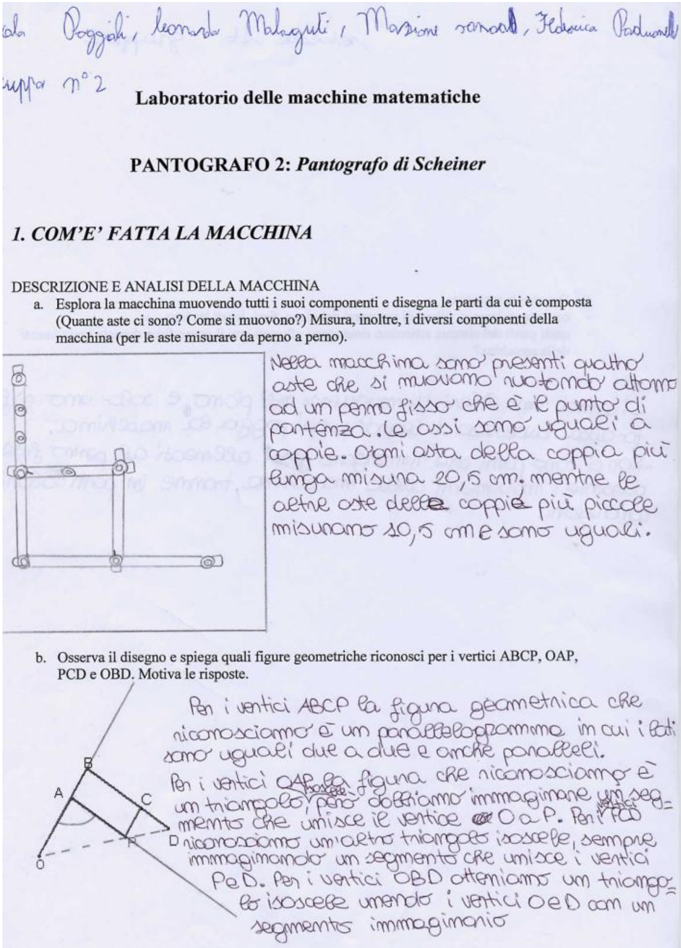
1

Figura 10 - Pantografo per la simmetria assiale

L'attività prosegue con lo studio del pantografo per l'omotetia (pantografo di Scheiner):

Dopo questa discussione, consegno il pantografo di Scheiner e le schede 1-2-3 relative al pantografo 2. I ragazzi hanno acquisito più dimestichezza con la macchina, anche se le ore sono insufficienti per la compilazione di tutte le schede. Tutti i gruppi hanno capito dal primo disegno che la macchina ingrandiva o rimpiccioliva, uno in particolare ha osservato che l'ingrandimento o rimpicciolimento era del doppio o della metà.

Nella quarta lezione riconsegno il pantografo di Scheiner e le schede affinché i gruppi finiscano di compilarle. Subito dopo facciamo un piccolo riassunto della macchina, parlando di ciò che hanno prodotto. Nella discussione ci sono stati interventi molto interessanti: i ragazzi hanno ipotizzato il cambio di punto fisso, anche se presentano difficoltà a capire cosa farà la macchina, una volta cambiato il punto fisso. Dopo la discussione consegno la verifica sul pantografo di Scheiner (vedi Cap. 13). (Concu, 2010, p. 3).



...ola Poggioli, Leonardo Malaguti, Massimo ..., Federica Paduan...

...uppo n° 2

Laboratorio delle macchine matematiche

PANTOGRAFO 2: *Pantografo di Scheiner*

1. COM'E' FATTA LA MACCHINA

DESCRIZIONE E ANALISI DELLA MACCHINA

a. Esplora la macchina muovendo tutti i suoi componenti e disegna le parti da cui è composta (Quante aste ci sono? Come si muovono?) Misura, inoltre, i diversi componenti della macchina (per le aste misurare da perno a perno).

Nella macchina sono presenti quattro aste che si muovono ruotando attorno ad un perno fisso che è il punto di partenza. Le assi sono uguali a coppie. Ogni asta della coppia più lunga misura 20,5 cm. mentre le altre aste delle coppie più piccole misurano 10,5 cm e sono uguali.

b. Osserva il disegno e spiega quali figure geometriche riconosci per i vertici ABCP, OAP, PCD e OBD. Motiva le risposte.

Per i vertici ABCP la figura geometrica che riconosciamo è un parallelogramma in cui i lati sono uguali due a due e anche paralleli. Per i vertici OAP la figura che riconosciamo è un triangolo isoscele, però dobbiamo immaginare un segmento che unisce il vertice O a P. Per i PCD riconosciamo un'altro triangolo isoscele, sempre immaginando un segmento che unisce i vertici P e D. Per i vertici OBD otteniamo un triangolo isoscele unendo i vertici O e D con un segmento immaginario

Figura 11 – La scheda sul pantografo di Scheiner

Un elemento di particolare interesse è la rielaborazione che l'insegnante fa delle domande chiave per l'esplorazione della macchina. La prima domanda (*Come è fatta la macchina?*) viene rielaborata attraverso una serie di domande utili per guidare gli studenti nello studio delle componenti dell'artefatto (a), nell'individuazione delle figure geometriche riconoscibili nella struttura (b) e dei possibili movimenti dei vertici del sistema articolato (c).

a - Esplora la macchina muovendo tutti i suoi componenti e disegna le parti da cui è composta (Quante aste ci sono? Come si muovono?) Misura, inoltre, i diversi componenti della macchina (per le aste misurare da perno a perno).

b - Osserva il disegno e spiega quali figure geometriche riconosci per i vertici ABCD, OAD, DCP e OBP.

c - Come sono i vertici (liberi di muoversi nel piano, fissi, legati tra loro, ecc.)? Quali punti del sistema articolato rimangono allineati con il perno fisso durante i movimenti della macchina?

È molto interessante osservare che gli studenti dopo l'esplorazione del pantografo sono in grado di produrre congetture argomentate sul perché la macchina produce un'omotetia di rapporto 1:2.

Si può osservare che la distanza fra il punto fisso e il tracciatore misura il doppio della distanza fra il punto fisso e il puntatore. I punti OPD sono allineati tra loro. Questo perché se i tre punti non fossero allineati la distanza fra il punto fisso e il tracciatore non sarebbe il doppio di quella tra il punto fisso e il puntatore e la macchina non sarebbe in grado di compiere la trasformazione (C1).

Per quanto riguarda il pantografo per lo stiramento viene introdotto come variazione del pantografo per la simmetria assiale.

Dopo la discussione ho consegnato il pantografo di Delunay per lo stiramento e le schede 1-2-3 del pantografo 3. I ragazzi cominciano subito a lavorare e le domande sono ora pochissime. Riescono a muoversi con molta più disinvoltura nei confronti della macchina, ma anche delle schede. La descrizione, il disegno e le configurazioni limite della macchina sono acquisite e chiare per ogni gruppo. Tutti riescono a capire la trasformazione, senza però descriverla nel dettaglio. Per la prossima lezione ho dato il compito di costruire le tre macchine viste finora con del cartoncino e dei ferma-campioni. Le tre costruzioni serviranno per la discussione finale e per la verifica che faranno sui tre pantografi.

Nella 6° lezione c'è stata una discussione finale sul laboratorio svolto e sui pantografi utilizzati, al termine della quale ho consegnato la verifica generale sui pantografi. Abbiamo corretto insieme le verifiche e devo dire che sono andate molto bene. (Concu, 2010, p. 3).

In questa classe l'insegnante ha proposto agli studenti una verifica complessiva sui tre pantografi (Fig. 11). Nella verifica gli studenti di fronte a una trasformazione data dovevano individuare il pantografo che l'aveva prodotta e giustificare la loro risposta (in appendice la prova di verifica). Si riporta un esempio della verifica. In questo esempio si vede come gli studenti sono stati in grado di collegare la trasformazione con il pantografo studiato, e di rendersi conto quando la trasformazione non aveva nessuna relazione con i pantografi presi in esame. È piuttosto interessante osservare che sulla trasformazione geometrica vengono riportati elementi geometrici significativi per la trasformazione come l'asse di simmetria (corrispondente alla scanalatura del pantografo per la simmetria assiale), oppure le semirette che partono dal centro di omotetia (punto fisso del pantografo di Scheiner) che mettono in evidenza l'allineamento dei punti nell'omotetia.

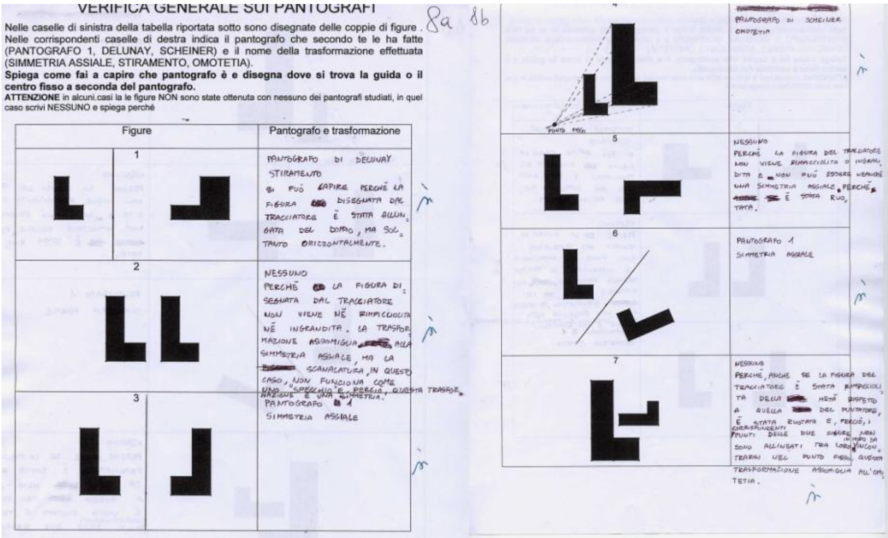


Figura 12 - La verifica sui pantografi

Un elemento che mi pare significativo dal diario di bordo è la riflessione su ruolo dell'insegnante in un'attività di laboratorio con le macchine matematiche:

Il mio ruolo di insegnante è cambiato parecchio in questo laboratorio. Gli argomenti non sono stati introdotti attraverso la lezione frontale, ma solo dopo l'utilizzo delle macchine e la comprensione dei parametri che caratterizzano le varie trasformazioni. Il lavoro degli alunni è diventato 'attivo'. Il primo passo è stato quello di spiegare ai ragazzi il percorso da seguire e le finalità dell'attività. Quindi, dopo la distribuzione delle schede-guida, gli alunni procedono nel gruppo in modo autonomo. La correzione e la discussione in classe sui loro elaborati è stato un modo per rielaborare le loro idee, correggerle in caso di imprecisioni e crearne di nuove; è diventato per me anche uno strumento di controllo sull'apprendimento. È stato inoltre possibile ritornare su argomenti già trattati (come le caratteristiche delle figure geometriche), ma in contesti diversi ed è stato un modo per richiamare alla mente ciò che era stato appreso o scoperto e 'risistemarlo' alla luce di nuove esperienze.

Anche la verifica ha avuto connotati diversi dalle verifiche tradizionali: ha prevalso il dialogo tra insegnante e studenti ed è stato possibile, da parte mia, valutare i ragazzi durante i momenti di dialogo fra loro. Questi ultimi avvenivano sia spontaneamente durante il laboratorio, ma anche dopo la compilazione delle varie schede, stimolando il confronto su quanto scritto. (Concu, 2010, p. 8).

Docente M. Pelillo, I.C. "G. Marconi", Castelfranco Emilia (Mo) – Scuola Secondaria di I grado, Classe II

In questa sperimentazione l'obiettivo principale era quello di confrontare una trasformazione isometrica (simmetria assiale) con una trasformazione non isometrica (stiramento), pertanto sono stati utilizzati due pantografi.

Il docente descrive in questo modo i suoi obiettivi:

Il percorso sulle trasformazioni (isometriche e non isometriche) è parte della programmazione annuale dell'insegnante. La possibilità di utilizzare le macchine matematiche nella fase introduttiva all'argomento ha la funzione di motivare gli alunni e di proporre una metodologia abbastanza originale. L'uso delle macchine permette di fissare concetti precedentemente acquisiti e fare tesoro di esperienze già svolte, relative alla perpendicolarità e allo studio delle proprietà dei quadrilateri. Allo stesso tempo, la fase di produzione pratica permette di approdare in maniera del tutto spontanea alla formalizzazione e all'astrazione del concetto. L'associazione dello stiramento alla simmetria assiale, infine, consente di dare spazio già dal principio del percorso, alla possibilità di una trasformazione non isometrica, ottenuta secondo procedure non dissimili da quelle di una trasformazione isometrica. In questo modo si fissa l'attenzione sulle differenze tra le due categorie di trasformazioni e, insieme, si consolidano concetti parallelamente affrontati in ambito aritmetico, quali il rapporto e la riduzione in scala. (Pelillo, 2010b, p. 146).

Il confronto fra i due pantografi porta gli studenti a formulare congetture circa le trasformazioni prodotte, come evidenziato dal diario di bordo dell'insegnante:

Manuel M. giustifica la formazione della figura simmetrica attraverso l'uguaglianza dei lati del rombo (*se i due lati di destra portano il puntatore in una data posizione nel piano, il tracciatore è costretto dagli altri due lati a raggiungere la posizione corrispondente oltre la scanalatura*). La riflessione sulla posizione reale del punto tracciato P' rispetto a quello iniziale P (stessa distanza dalla scanalatura e perpendicolarità del segmento PP' rispetto alla stessa scanalatura) permette in breve a molti alunni di riferire queste caratteristiche alle proprietà delle diagonali del rombo (*sono perpendicolari e si tagliano a metà*).

Alla domanda se esista un'altra figura geometrica che potrebbe sostituire il rombo, tre alunni alzano la mano indicando il deltoide, altri rifiutano la proposta, Aline realizza un disegno in cui dimostra che anche il deltoide produrrebbe lo stesso risultato. Infine l'insegnante sottolinea che, affinché la macchina produca una simmetria assiale, non è necessario che entrambe le diagonali del quadrilatero si taglino a metà, ma basta che questa proprietà appartenga a una delle due diagonali, come accade nel deltoide. (Pelillo, 2010a, p. 5).

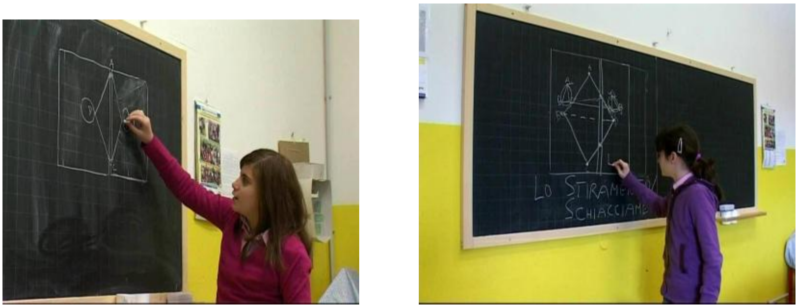


Figura 13 - Confronto fra i due pantografi

Le considerazioni conclusive sul ruolo dell'insegnante sono anche in questo caso interessanti e simili a quelle dell'esempio precedente, pur in una realtà dove c'è una certa abitudine al lavoro di gruppo e alla discussione collettiva. Il ruolo degli strumenti nell'attività laboratoriale è esplicitato con queste parole:

L'uso delle macchine matematiche ha costituito un elemento di forte motivazione nelle fasi iniziali dell'attività. Ha permesso ai gruppi di costruire le proprie conoscenze in modo più autonomo rispetto all'intervento dell'insegnante, che è servito soprattutto per stimolare, sintetizzare, porre domande che aiutassero a dirigere l'attenzione su alcuni aspetti prioritari. L'attività in gruppo ha anche obbligato i soggetti più individualisti ad un confronto con i compagni. Occorre dire che la classe è generalmente molto partecipe, anche quando le lezioni sono meno strutturate e frontali, tuttavia è stato evidente il differente livello di partecipazione nelle lezioni 1 e 3 (con l'uso delle macchine) rispetto alla lezione 2 (senza l'uso delle macchine). Ho notato soprattutto che, se nella lezione 1, le macchine sono state usate con un certo senso di timore (e quasi esclusivamente dai leader dei gruppi), nella lezione 3, tutti i componenti dei gruppi si sono alternati nel loro uso e hanno voluto verificare direttamente le proprie ipotesi. Al termine del percorso ho l'impressione che molti dei ragazzi abbiano acquisito un'idea di trasformazione geometrica molto legata all'uso delle stesse macchine e che restino ancora in difficoltà nel riprodurre le stesse trasformazioni con l'uso dei tradizionali strumenti di disegno; ciò, però, è legato al fatto che l'argomento delle trasformazioni è stato trattato esplicitamente per la prima volta in questa sede, quindi, nell'affrontare altri tipi di trasformazione (senza l'uso di macchine) sarà superata questa difficoltà. (Pelillo, 2010a, p. 10).

12.4. Riflessioni

Gli esempi di sperimentazioni presentati mettono in luce un aspetto importante: la rielaborazione da parte degli insegnanti delle attività svolte durante la formazione in relazione alla classe di riferimento e agli obiettivi che si prefiggevano. In particolare si possono osservare alcuni elementi comuni a tutte le sperimentazioni e che rappresentano un risultato importante del Progetto MMLab-ER:

- attenzione ai processi di produzione di congetture argomentate fino alla costruzione di dimostrazioni;
- attenzione alla verbalizzazione scritta e orale delle costruzioni geometriche delle congetture prodotte;
- utilizzo di uno schema esplorativo comune a tutte le macchine (*Come è fatta? Cosa fa? Perché? Cosa succederebbe se…?).* In genere nelle classi di scuola secondaria di II grado le domande sono state poste direttamente senza ulteriori guide, mentre nelle classi con studenti più giovani le domande sono state accompagnate da una serie di ulteriori domande aventi lo scopo di guidare l'esplorazione;
- rielaborazione di situazioni problematiche proposte nel corso di formazione. In particolare la domanda *Cosa succederebbe se...?* ha stimolato la creatività dei docenti, che hanno proposto diverse variazioni della macchina in esame. In questo caso il pantografo di Scheiner si è rivelato il più versatile tra le macchine matematiche proposte e molte sono state le situazioni problematiche proposte

> dagli insegnanti alle loro classi: *Cosa succederebbe se il punto fisso fosse il puntatore? Cosa succederebbe se il triangolo grande non fosse isoscele? Come ottenere ugualmente un'omotetia?* Un docente del corso ha presentato un disegno di un pantografo 'sbagliato' nel senso che la struttura della 'nuova' macchina manteneva alcune caratteristiche del pantografo di Scheiner, ma veniva a mancare l'allineamento dei punti trasformati con il punto fisso. È stata posta la domanda: *perché questo pantografo non funziona?* Attraverso questa domanda l'insegnante voleva far esplicitare agli studenti (Istituto Professionale, classe seconda) le condizioni necessarie per definire la trasformazione del piano.

È abbastanza difficile rendere conto della complessità delle sperimentazioni svolte; nel report finale del progetto ne sono state riportate alcune, due per provincia, tenendo conto del livello scolare e delle macchine matematiche utilizzate, mentre tutte le altre sono state rendicontate dagli insegnanti attraverso i diari di bordo e i report finali accessibili sul sito del Progetto[59].

[59] *http://www.mmlab.unimore.it/online/Home/ProgettoRegionaleEmiliaRomagna/RisultatidelProgetto/Reportdellesperimentazioni.html*

Capitolo tredicesimo
Un quesito tipo-PISA sul pantografo di Scheiner

Nella primavera del 2010 sono stata coinvolta come docente esperta di didattica della matematica nella predisposizione di alcune domande da sottoporre al Consorzio Internazionale del Progetto OCSE-PISA in vista della rilevazione del 2012 che avrà come focus principale la matematica. Le domande della rilevazione OCSE-PISA vengono proposte dai singoli comitati tecnici dei diversi paesi afferenti al progetto, secondo criteri coerenti con il quadro di riferimento del progetto, e analizzate da gruppi di esperti presenti in ogni paese che partecipa alla rilevazione. Le domande vengono poi selezionate per il così detto *field trial* (prova sul campo). Dall'analisi dei risultati della prova sul campo si selezionano le domande che entreranno a far parte della rilevazione vera e propria (*main study*). Il Consorzio Internazionale del Progetto PISA aveva inoltre richiesto che alcune domande fossero computer-based, cioè risolvibili con l'uso del computer. Una delle domande di matematica che ho preparato per la rilevazione PISA 2012 riguarda una macchina matematica: il pantografo per l'omotetia o pantografo di Scheiner, ed è stata realizzata per essere risolta con l'ausilio del computer.

È stata questa l'occasione per proporre la prova ad alcuni insegnanti del progetto MMLab-ER secondo un disegno di ricerca che mettesse in luce alcune ipotesi sui processi cognitivi degli allievi nella risoluzione di prove di verifica inerenti le macchine matematiche.

Nei paragrafi successivi vengono descritti i risultati di questa sperimentazione.

13.1. Il Progetto OCSE-PISA e la competenza matematica

L'indagine PISA (*Programme for International Student Assessment*) è un'indagine internazionale promossa dall'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico)[60] che mira ad accertare, con periodicità triennale, conoscenze e capacità dei quindicenni scolarizzati dei principali Paesi industrializzati e permettere un controllo periodico del sistema dell'istruzione. L'indagine ha lo scopo di verificare in che misu-

[60] Il progetto PISA sul sito dell'OCSE: *http://www.pisa.oecd.org/*

ra i giovani prossimi all'uscita dalla scuola dell'obbligo abbiano acquisito alcune competenze giudicate essenziali per svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e per continuare ad apprendere per tutta la vita. Quindi, più che rilevare la padronanza di parti del curricolo scolastico, l'indagine PISA mira a valutare la capacità degli studenti quindicenni di utilizzare conoscenze e abilità apprese anche e soprattutto a scuola per affrontare problemi e compiti analoghi a quelli che si possono incontrare nella vita reale. L'indagine è mirata ad approfondire il quadro di conoscenze relativo ad alcune competenze considerate fondamentali in una prospettiva di apprendimento lungo il corso di tutta la vita: la competenza di lettura (*reading literacy*), definita come la capacità di utilizzare e interpretare un testo scritto e di riflettere su di esso; la competenza matematica (*mathematical literacy*), che pone l'accento sull'uso funzionale di conoscenze matematiche in vari contesti; la competenza scientifica (*scientific literacy*), che riguarda la capacità di utilizzare conoscenze scientifiche e di trarre conclusioni basate su dati per capire il mondo della natura e prendere decisioni relative a esso.

Le aree di indagine di PISA sono quindi: lettura, matematica e scienze. Ogni ciclo dell'indagine approfondisce in particolare un'area: nel primo ciclo (PISA 2000) è stata la lettura, nel secondo ciclo dell'indagine (PISA 2003) è stata la matematica; nel terzo ciclo (PISA 2006) quella relativa alle scienze e nel quarto ciclo (PISA 2009) la lettura (Fig. 1).

2000	**Lettura**	Matematica	Scienze
2003	Lettura	**Matematica**	Scienze
2006	Lettura	Matematica	**Scienze**
2009	**Lettura**	Matematica	Scienze

Le celle evidenziate in blu rappresentano l'oggetto principale di indagine

Figura 1 - Il piano delle rilevazioni PISA

Alcuni quesiti relativi alle altre aree sono comunque presenti in tutte le rilevazioni, per consentire il confronto tra i risultati ottenuti in ciascuna di esse. Per ciascuna area della verifica è stato messo a punto un quadro di riferimento che ne definisce i contenuti, i processi e i contesti problematici, fornendo un punto di riferimento nella costruzione delle prove. La popolazione di riferimento è costituita dai quindicenni scolarizzati, dal momento che tale età precede, nella maggior parte dei paesi dell'OCSE, il termine dell'obbligo scolastico.

La direzione generale del progetto è assunta dall'OCSE. Un Consorzio Internazionale, composto da sei istituti di ricerca[61], è incaricato di garantire la realizzazione del progetto e di curarne il coordinamento a livello internazionale. In Italia, il MIUR ha affidato la responsabilità di realizzare l'indagine all'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e di Formazione (INVALSI)[62].

Le caratteristiche principali del progetto PISA sono:

a) la sua concezione innovativa di '*literacy*' (competenza), intesa come la capacità degli studenti di applicare conoscenze e abilità in precisi ambiti disciplinari e "di analizzare, di ragionare e di comunicare idee in modo efficace nel momento in cui essi pongono, risolvono e interpretano problemi in una molteplicità di situazioni" (OCSE, 2003);

b) la sua attinenza con l'apprendimento per tutta la vita (*lifelong learning*), per cui PISA non si limita soltanto a valutare le competenze curricolari degli studenti, ma vuole anche conoscere le loro motivazioni e le loro strategie nei confronti dell'apprendimento, e l'opinione che essi hanno di loro stessi;

c) la sua periodicità, che permette ai Paesi partecipanti di monitorare i loro progressi nel raggiungimento di obiettivi importanti nel campo dell'apprendimento;

d) l'importanza che viene attribuita ai risultati degli studenti tenendo però conto delle caratteristiche del loro background e delle scuole che frequentano per poter esaminare attentamente alcune delle caratteristiche fondamentali che sono associate con il successo scolastico;

e) l'elevato numero di Paesi partecipanti che permette un'ampia copertura geografica e il coinvolgimento di quasi un terzo della popolazione mondiale in questo progetto.

Al PISA 2003, ambito prevalente la matematica, hanno partecipato circa 275.000 studenti appartenenti a 41 diversi paesi (30 membri dell'OCSE e 11 paesi partner). Non si è trattato di un semplice test sulle

[61] I sei istituti che compongono il Consorzio Internazionale sono: Australian Council for Educational Research (ACER, Australia), Linguistic Quality Control (CAPSTAN, Belgio), WESTAT (Stati Uniti), National Institute for Educational Research (NIER, Giappone), Deutshes Institut für Pädagogische Forschung (DIPF, Germania), Analyse des systèmes et despratiques d'enseignement (aSPE, Francia).

[62] Il progetto PISA sul sito dell'INVALSI:
http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2009.php?page=pisa2009_it_00

abilità matematiche degli studenti 15enni e di quanto essi sappiano eseguire operazioni matematiche, ma piuttosto di una valutazione su quanto essi siano in grado di riconoscere, formulare e affrontare problemi matematici in un contesto di vita reale. Al PISA 2009, ultima rilevazione effettuata, hanno partecipato 74 paesi.

13.1.1. La competenza matematica

La definizione di competenza matematica (*mathematical literacy*) nell'indagine PISA 2003 è la seguente:

> La capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione. (CSE, 2003; trad..it. 2004,.p. 10).

L'espressione 'competenza matematica' sta ad indicare che le conoscenze matematiche devono essere attivate in modo funzionale in diverse situazioni e con diversi tipi di approcci basati principalmente sul ragionamento e sull'intuizione. Naturalmente, affinché questa attivazione sia possibile, è necessario possedere un'ampia base di conoscenze ed abilità matematiche e sono proprio queste abilità che fanno parte della definizione di competenza.

Per valutare la competenza matematica degli studenti quindicenni, l'indagine PISA ha utilizzato nel 2003 una serie di prove cognitive costituite ciascuna da uno stimolo iniziale seguito da uno o più quesiti. Le prove sono state preparate dal Consorzio internazionale con il contributo di tutti i paesi partecipanti sulla base del quadro teorico di riferimento messo a punto dall'OCSE, il quale fornisce non soltanto il fondamento teorico della ricerca, ma anche la descrizione di come deve essere impostata la verifica della capacità dei quindicenni di saper utilizzare la matematica quando si trovano di fronte a problemi della vita reale. Affinché fosse possibile misurare il grado di competenza di uno studente attraverso il modo in cui utilizza conoscenze e abilità matematiche per risolvere i problemi di vita reale, era necessario che le prove fossero costruite tenendo conto di tre diverse componenti (OCSE, 2003):

- le *situazioni* o i *contesti* in cui il problema è situato;
- il *contenuto matematico* che deve essere usato per risolvere il problema;

- le *competenze* che devono essere attivate durante il processo risolutivo attraverso il quale il mondo reale, nel quale i problemi hanno origine, viene messo in relazione con la matematica (Fig.2).

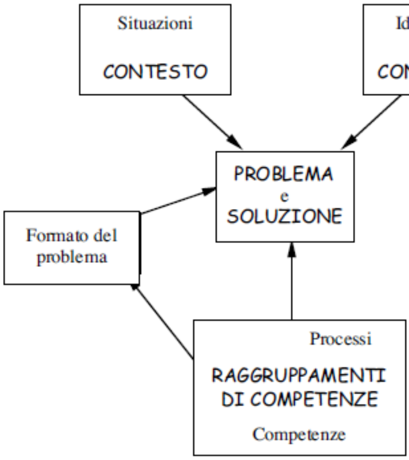


Figura 2 - Le componenti delle domande PISA

13.1.2. I contenuti

Per quanto riguarda il contenuto matematico, nella costruzione delle prove cognitive del PISA sono state prese in considerazione quattro diverse aree di contenuto, denominate idee chiave (in inglese *overarching ideas*).

Queste quattro aree di contenuto sono state così denominate:
- *Quantità.*
- *Spazio e forma*.
- *Cambiamento e relazioni.*
- *Incertezza*.

13.1.3. I contesti

Un aspetto importante della definizione di competenza matematica è il confrontarsi con la matematica: utilizzare la matematica e "fare matematica" in una molteplicità di situazioni. Si è visto che, occupandosi di questioni che si prestano a essere trattate in termini matematici, la scelta dei metodi e delle rappresentazioni matematiche dipende spesso dalle situazioni in cui si presentano i problemi. La situazione è quella porzione del mondo dello studente in cui sono collocati i compiti da svolgere. Essa si trova a una certa distanza dagli studenti. Nel progetto OCSE/PISA, la situazione considerata più prossima è la vita personale dello studente, seguita dalla vita scolastica, dal lavoro e dal tempo libero e, infine, dalla comunità locale e dalla società come la si incontra nella vita quotidiana. Le situazioni considerate più remote, invece, sono quelle scientifiche. Si utilizzano quattro situazioni-tipo quali ambiti dei problemi da risolvere: *personale, scolastica/professionale, pubblica e scientifica*. Il contesto di un quesito è rappresentato dal suo scenario specifico all'interno di una situazione. Il contesto comprende tutti i singoli elementi utilizzati per formulare il problema.

13.1.4. I processi matematici

Il progetto OCSE/PISA esamina la capacità degli studenti di analizzare, ragionare e comunicare idee matematiche in modo efficace nel momento in cui pongono, formulano, risolvono problemi matematici e ne interpretano le soluzioni. Tale attività di analisi e soluzione di problemi richiede, da parte degli studenti, l'uso di abilità e competenze acquisite attraverso il percorso scolastico e l'esperienza. Nell'indagine OCSE/PISA, si usa il termine 'matematizzazione' per riferirsi a un processo fondamentale del quale gli studenti si servono per risolvere problemi della vita reale.

13.1.5. Le competenze specifiche

Una persona che affronta con successo il processo di matematizzazione nell'ambito di una molteplicità di situazioni e contesti, extra e intra-matematici, e di diverse idee chiave, deve possedere un certo numero di competenze matematiche che, nel loro insieme, possono essere considerate come costitutive della competenza matematica. Ciascuna di queste competenze può essere posseduta a diversi livelli di padronanza. Le diverse fasi del processo di matematizzazione si basano in modo differenziato su queste competenze, sia per quanto riguarda le specifiche competenze messe in gioco, sia per quanto riguarda il livello di padronanza richiesto. Per individuare e analizzare queste competenze, il progetto OCSE/PISA ha deciso di fare riferimento a otto tipiche competenze matematiche, che si basano, nella loro forma attuale, sul lavoro di Niss (1999) e dei suoi colleghi danesi.

1. Pensiero e ragionamento. Questa competenza consiste: nel formulare domande che sono tipiche della matematica ("C'è…?", "Se è così, quanti?", "Come troviamo…?"); nel conoscere i tipi di risposte che la matematica dà a tali domande; nel distinguere tra diversi tipi di enunciati (definizioni, teoremi, congetture, ipotesi, esempi, affermazioni di tipo condizionale); e nel comprendere e trattare la portata e i limiti di determinati concetti matematici.

2. Argomentazione. Questa competenza consiste: nel conoscere cosa sono le dimostrazioni matematiche e come differiscono da altri tipi di ragionamento matematico; nel seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nell'avere un'idea dell'euristica ("Che cosa può o non può accadere? E perché?"); e nel creare ed esprimere ragionamenti matematici.

3. Comunicazione. Questa competenza consiste nel sapersi esprimere in vari modi su questioni di carattere matematico, in forma orale e scritta e nel comprendere gli enunciati scritti od orali di altre persone circa tali questioni.

4. Modellizzazione. Questa competenza consiste: nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata; nel tradurre 'la realtà' in strutture matematiche; nell'interpretare i modelli matematici in termini di 'realtà'; nel lavorare con un modello matematico; nel validare il modello, nel riflettere, analizzare e valutare un modello e i suoi risultati; nel comunicare ad altri il modello e i suoi risultati (compresi i limiti di tali risultati); e nel monitorare e controllare il processo di modellizzazione.

5. Formulazione e risoluzione di problemi. Questa competenza consiste nel porre, formulare e definire diversi tipi di problemi matematici (quali problemi 'puri', 'applicati', 'aperti' e 'chiusi') e nel risolverli in vari modi.

6. Rappresentazione. Questa competenza consiste: nel decodificare e codificare, tradurre, interpretare e distinguere le diverse forme di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche e le relazioni tra le varie rappresentazioni; nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione a un'altra, in relazione alla situazione e allo scopo.

7. Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni. Questa competenza consiste: nel decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale e nel comprendere il suo rapporto con il linguaggio naturale; nel tradurre il linguaggio naturale in linguaggio simbolico/formale; nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengano simboli e formule; e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli.

8. Uso di sussidi e strumenti. Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti (comprese le tecnologie dell'informazione) che possono facilitare l'attività matematica e nel conoscerne i limiti.

Il progetto PISA ha scelto di dividere le competenze e i processi cognitivi che esse mettono in gioco in tre diversi raggruppamenti: il raggruppamento della *riproduzione*, quello delle *connessioni* e quello della *riflessione*.

Il raggruppamento della riproduzione: le competenze che rientrano in questo raggruppamento consistono nella riproduzione di conoscenze note e comprendono quelle più comunemente usate negli accertamenti standardizzati e nelle verifiche scolastiche. Tali competenze sono la conoscenza di dati di fatto e di rappresentazioni di problemi comuni, l'identificazione di equivalenze, il ricordo di argomenti e proprietà matematiche note, l'esecuzione di procedure di routine, l'applicazione di algoritmi standard e di abilità tecniche, la manipolazione di espressioni con simboli e formule standard e l'esecuzione di calcoli.

Il raggruppamento delle connessioni: le competenze del raggruppamento delle *connessioni* presuppongono le competenze della *riproduzione* in quanto estendono l'attività di soluzione di problemi a situazioni che non sono di semplice routine, ma che chiamano in causa ambiti comunque familiari o semi-familiari.

Il raggruppamento della riflessione: le competenze di questo raggruppamento richiedono un elemento di riflessione da parte degli studenti sui processi richiesti o utilizzati per risolvere un problema. Esse sono legate all'abilità degli studenti di pianificare strategie di soluzione e di applicarle affrontando ambiti problematici più complessi e meno familiari rispetto a quelli del raggruppamento delle *connessioni*.

Un'altra caratteristica delle prove è il loro livello di difficoltà, che per le prove di matematica del 2003 variava dal livello 1 (il livello più basso) al livello 6 (il livello più alto). La padronanza tipica di ciascun livello può essere descritta in base alle competenze matematiche che lo studente deve possedere per raggiungere quel determinato livello e per essere, quindi, in grado di risolvere i quesiti corrispondenti a quel livello.

Oltre alle prove cognitive, agli studenti è stato somministrato un questionario per raccogliere informazioni riguardanti la provenienza socio-economica, la motivazione nei confronti della matematica e le strategie di apprendimento della matematica, gli atteggiamenti nei confronti della scuola e le relazioni con gli insegnanti. I risultati dei questionari sono stati utilizzati per cercare di interpretare le diverse *performance* degli studenti, sia a livello nazionale che a livello internazionale.

13.1.6 I risultati in matematica del 2003

I risultati della rilevazione vengono forniti su cinque diverse scale di valutazione. La prima scala riguarda il punteggio raggiunto da ciascun paese partecipante sulla scala complessiva di competenza matematica, mentre le altre quattro scale si riferiscono al punteggio ottenuto in ognuna alle quattro aree di contenuto (*Quantità*, *Spazio e forma*, *Cambiamento e relazioni* e *Incertezza*). Il punteggio corrispondente al livello più basso della scala, cioè al livello 1, è compreso tra 358 e 420 punti, quello corrispondente al livello più alto, cioè al livello 6, è superiore a 669. La differenza di punteggio tra un livello e l'altro è di 62 punti. Il livello 3 corrisponde al livello medio.

Nella tabella 1.1 sono riportati i punteggi ottenuti dai principali paesi partecipanti al PISA 2003.

Il risultato conseguito dall'Italia non è di certo confortante, ma è interessante analizzarlo in maniera più approfondita, considerando non il punteggio che l'Italia nel suo complesso ha riportato, bensì i singoli punteggi ottenuti dagli studenti appartenenti alle cinque macroaree (Nord Ovest, Nord Est, Centro, Sud e Sud Isole) in cui il campione italiano è stato suddiviso[63] (Tab. 1.2).

[63] IL Nord Ovest comprende Piemonte, Lombardia, Liguria e Valle d'Aosta; il Nord Est comprende Veneto, Friuli Venezia Giulia, Trentino, Alto Adige e Emilia-Romagna; il Centro comprende Toscana, Lazio, Marche, Umbria; il Sud comprende Abruzzo, Molise, Campania e Puglia; il Sud Isole comprende Calabria, Basilicata, Sicilia e Sardegna.

Tabella 1.1: Punteggio medio per la scala complessiva e le quattro scale specifiche di matematica.

Paese	**Scala complessiva di competenza matematica**	**Quantità**	**Spazio e forma**	**Cambiamento e relazioni**	**Incertezza**
Hong Kong	550 (4,5)	545	558	540	558
Finlandia	544 (1,9)	549	539	543	545
Corea	542 (3,2)	537	552	548	538
Paesi Bassi	538 (3,1)	528	526	551	549
Giappone	534 (4,0)	527	553	536	528
Canada	532 (1,8)	528	518	537	542
Australia	524 (2,2)	517	521	525	531
N. Zelanda	523 (2,3)	511	525	526	532
Francia	511 (2,5)	507	508	520	506
Germania	503 (3,3)	514	500	507	493
Media OCSE	**500** (0,6)	**501**	**496**	**499**	**502**
Polonia	490 (2,5)	492	490	484	494
Spagna	485 (2,4)	492	476	481	489
USA	483 (3,0)	476	472	486	491
Fed. Russa	468 (4,2)	472	474	477	436
Portogallo	466 (3,4)	465	450	468	471
Italia	**466** (3,1)	**475**	**470**	**452**	**463**
Grecia	445 (3,9)	446	437	436	458
Turchia	423 (6,7)	413	417	423	443
Messico	385 (3,6)	394	382	364	385

Fonte: OECD, 2004. (Fra parentesi l'errore standard)

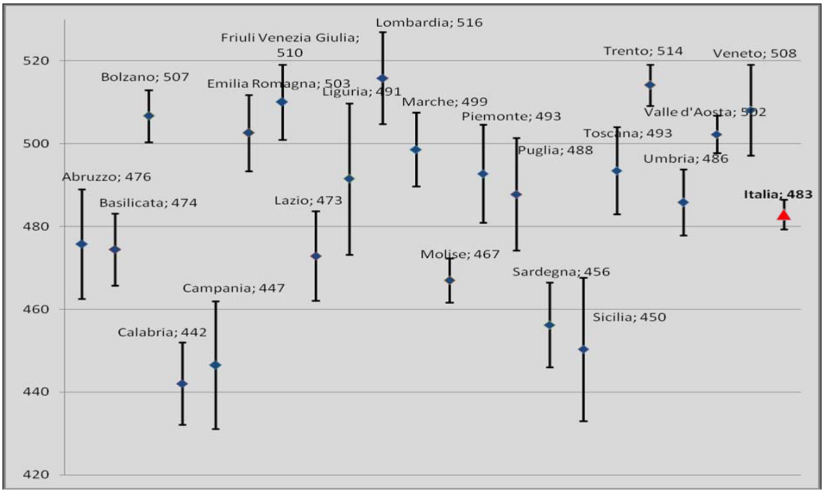
Macroarea	**Scala complessiva di competenza matematica**	**Quantità**	**Spazio e forma**	**Cambiamento e relazioni**	**Incertezza**
Nord Ovest	510 (5,1)	519	515	503	506
Nord Est	511 (7,7)	522	517	500	507
Centro	472 (5,6)	482	478	458	469
Sud	428 (8,2)	438	432	411	426
Sud Isole	423 (6,1)	432	427	407	422
ITALIA	**466** (3,1)	**475**	**470**	**452**	**463**

Fonte: OECD, 2004

Tabella 1.2: Punteggi di matematica per area geografica

Questi risultati mettono in luce una profonda disparità nel paese, con Sud e Isole nettamente al disotto dei risultati ottenuti dagli studenti delle altre macro-aree[64].

È recente (7 dicembre 2010)[65] la notizia dei primi parziali risultati dell'indagine OCSE PISA 2009 conseguiti dagli studenti italiani. Si osserva un dato in controtendenza: in tutte e tre le aree di indagine (lettura, matematica e scienze), l'Italia registra un miglioramento, il primo dal 2000. Per la matematica il nostro Paese si piazza al 35mo posto, con un punteggio di 483 (496 la media Ocse). La distanza dunque è di 13 punti, mentre nel 2006 lo scarto era di 36 punti e nel 2003 di 34. Nel Nord Italia si registrano tuttavia performance superiori alla media Ocse (507), mentre nel Sud e nelle isole il punteggio è inferiore rispetto a quello medio italiano. Se i dati confermano i migliori esiti degli studenti settentrionali, emerge pure che in questa edizione dell'indagine sono gli studenti del Sud a far registrare gli incrementi maggiori. La Puglia, ad esempio, segna un recupero che in matematica supera i 50 punti. I grafici riportati sotto mostrano i risultati per regione e il trend dei risultati in matematica.



[64] Un'analisi interessante sui risultati e sui principali errori degli studenti italiani è quella condotta da Stefania Pozio nella sua tesi di dottorato in Pedagogia Sperimentale, *La risoluzione di prove di competenza matematica: analisi dei risultati italiani nell'indagine OCSE-PISA 2003*, Università La Sapienza, Roma.

[65] *www.invalsi.it*

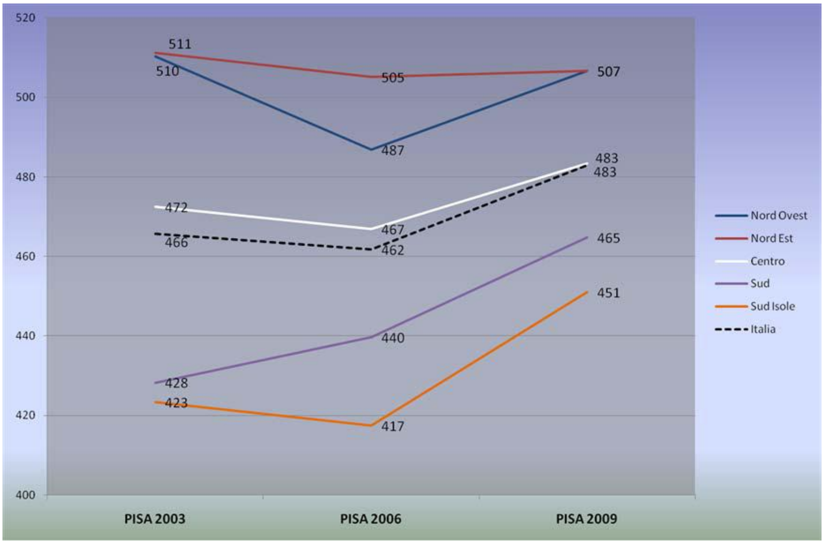


Figura 3 - I risultati italiani nel PISA 2009 (Fonte INVALSI)

13.2. Un esempio di quesito PISA di matematica

Per esemplificare in dettaglio come sono strutturati i quesiti PISA si riporta un esempio di quesito (OCSE 2003, trad. it. 2004, p. 31).

IL LAMPIONE

> Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere collocato il lampione?

Secondo il quadro PISA il quesito viene descritto in questo modo:

- Contesto: *pubblico*.
- Idea chiave *spazio e forme*.
- Competenza: *raggruppamento della riflessione*.
- Domanda: *aperta a risposta articolata*.

Questo problema pratico può essere risolto seguendo la strategia generale usata dai matematici, a cui si farà riferimento con il termine 'matematizzazione'.

La matematizzazione può essere definita sulla base di 5 aspetti.

1. Partire da un problema reale. Occorre localizzare il punto di un parco in cui mettere un lampione.

2. Strutturare il problema in base a concetti matematici. Il parco può essere rappresentato come un triangolo e l'illuminazione di un lampione come un cerchio con il lampione al centro.

3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale in un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione). Il problema viene riformulato in: "localizzare il centro del cerchio circoscritto al triangolo".

4. Risolvere il problema matematico. Poiché il centro di un cerchio circoscritto a un triangolo giace nel punto di incontro degli assi dei lati del triangolo, occorre costruire gli assi di due lati del triangolo. Il loro punto di intersezione è il centro del cerchio.

5. Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale. La soluzione trovata viene applicata alla situazione del parco reale. Occorre ragionare sulla soluzione e riconoscere che se uno dei tre angoli fosse ottuso, la soluzione non sarebbe appropriata, poiché il lampione dovrebbe essere collocato fuori dal parco. Occorre anche riconoscere che l'ubicazione e la dimensione degli alberi nel parco sono altri fattori che influiscono sull'utilità della soluzione matematica (Fig. 4).

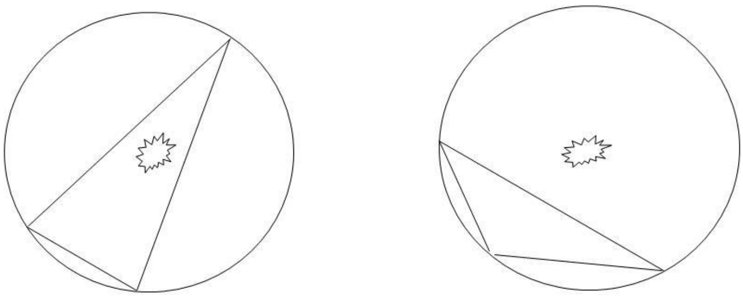


Figura 4 - Due soluzioni matematiche del quesito lampione

Il ciclo del processo di matematizzazione è schematizzato nella figura sotto riportata (Fig.5).

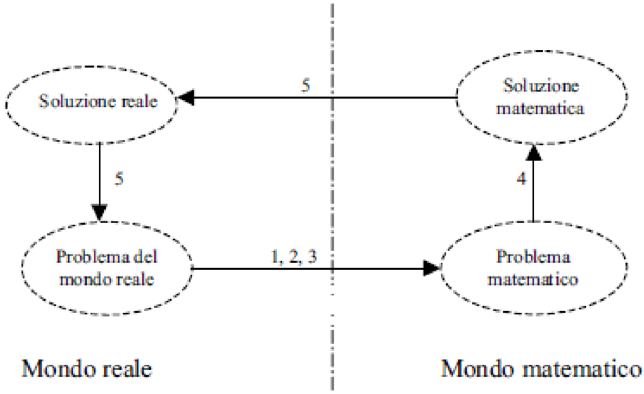


Figura 5 - Il ciclo della matematizzazione (OCSE, 2003, trad. it. 2004, p. 42)

Questi sono i processi che caratterizzano il modo in cui spesso i matematici fanno matematica in senso lato, il modo in cui la gente utilizza la matematica in un gran numero di lavori che svolge o che potrebbe dover svolgere, e il modo in cui cittadini informati e riflessivi dovrebbero avvalersi della matematica per impegnarsi pienamente e in modo competente nella realtà. In questa prospettiva imparare a matematizzare dovrebbe essere il primo obiettivo educativo per tutti gli studenti.

13.3. Gli strumenti per la matematica nelle indagini nazionali

Un elemento interessante ai fini di inquadrare l'uso di strumenti nella didattica della matematica può essere quello di andare ad analizzare se e come sono presenti questi oggetti nelle indagini nazionali (INVALSI) sulla rilevazione degli apprendimenti in matematica. Il Sistema di Valutazione Nazionale (SNV)[66] ha cominciato la sua indagine nell'a.s. 2008-09, mentre la Prova Nazionale all'esame di stato di fine primo ciclo (III classe secondaria di primo grado) è stata somministrata per la prima volta nell'a.s. 2007-08. Le rilevazioni SNV sono censuarie a partire dall'anno scolastico 2009-10, e coinvolgono tutti gli studenti italiani delle seguenti classi: II e V primaria, I secondaria di primo grado e da quest'anno (2010-11) anche la classe II secondaria di secondo grado. La Prova Nazionale coinvolge la III classe della secondaria di primo grado.

Andare ad esaminare se e come nelle prove INVALSI sono presenti quesiti che direttamente o indirettamente evocano artefatti della mate-

[66] *http://www.invalsi.it/invalsi/index.php*

matica può essere un indicatore interessante. Nel Quadro di Riferimento[67] (QdR) per la matematica l'unico riferimento esplicito agli strumenti è relativo al processo cognitivo: sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura).

Gli artefatti più comuni nella pratica didattica sono: il compasso e la squadra, gli strumenti di misura, righello e goniometro, e gli strumenti di calcolo, cioè l'abaco e la calcolatrice.
L'analisi delle prove INVALSI[68] degli ultimi due anni mostra attenzione importante agli strumenti, in alcuni casi esplicita, in altri evocata.

L'abaco (Classe II primaria, a.s. 2008-2009)

10. Quale numero corrisponde a 4 decine e 15 unità?

- ☐ A. 45
- ☐ B. 55
- ☐ C. 415

Risultati in percentuale[69]					
Ambito	Domanda	Omissioni	Opzione A	Opzione B	Opzione C
Numeri	D10	3,4	13,4	33,1	50,2

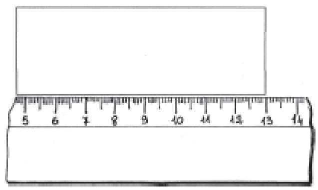
Il quesito richiama il significato di notazione posizionale, non si tratta di leggere un numero ma di aver compreso il ruolo della notazione posizionale nel nostro sistema di numerazione. L'abaco come strumento per rappresentare numeri viene evocato indirettamente. L'analisi dei risultati mette in luce un'area di criticità: il 50,2% dei bambini non riesce ad evocare l'immagine dell'abaco per rispondere al quesito.

[67]*http://www.invalsi.it/snv0910/documenti/Qdr_Matematica.pdf*
[68] *http://www.invalsi.it/snv0910/index.php?action = strumenti*
[69] In grigio l'opzione corretta.

Il righello (Classe V, a.s. 2009-2010)

Lo studente deve interpretare correttamente una lettura su uno strumento di misura di uso comune, ma modificato. La risposta corretta è la A. Le risposte B e C mettono in luce difficoltà relative all'aspetto ordinale del numero: nel primo caso la risposta corrisponde a un conteggio diretto dei numeri rappresentati nel righello, nel secondo la risposta corrisponde alla lettura diretta del righello senza tener conto che non parte da zero. La risposta D mette in luce la difficoltà relativa all'uso dello strumento.

D21. Giovanni vuole misurare il lato maggiore del rettangolo rappresentato qui sotto, ma il suo righello è rotto. Lo posiziona nel modo che vedi.



Qual è la misura del lato?

☐ A. La misura del lato è 8,3 cm

☐ B. La misura del lato è 9 cm

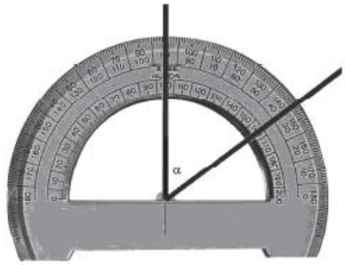
☐ C. La misura del lato è 13 cm

☐ D. Non si può misurare perché non c'è lo zero

Risultati in percentuale						
Ambito	Domanda	Omissioni	Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
Misura, dati e previsioni	D21	1,0	51,4	19,7	10,4	17,6

Il goniometro (Classe I secondaria di primo grado, a.s. 2009-2010)

D14. Per misurare l'ampiezza dell'angolo α, Francesco posiziona il goniometro nel modo che vedi.



Quanto misura l'angolo α ?

☐ A. 35°

☐ B. 55°

☐ C. 90°

☐ D. 145°

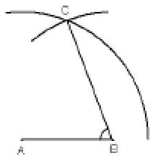
Risultati in percentuale						
Ambito	Domanda	Omissioni	Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
Misura, dati e previsioni	D14	1,4	16,7	47,7	10,8	23,4

Lo studente deve saper leggere uno strumento di misura noto, il goniometro, e interpretare la lettura. La risposta corretta B è scelta da quasi la metà degli studenti. Le risposte A e D corrispondono ad una lettura diretta della misura dell'angolo sul goniometro e quindi ad una difficoltà nell'uso dello strumento. La risposta D corrisponde alla lettura del goniometro senza tener conto della misura dell'angolo. Quasi uno studente su quattro sembra non aver mai usato un goniometro.

Il compasso (Classe III scuola secondaria di I grado, a.s. 2008-2009)

D19 Dati due punti A e B sono stati tracciati, con lo stesso raggio maggiore della metà del segmento, due archi di circonferenza, uno con centro in A e uno con centro in B. È stato chiamato C uno dei punti di intersezione tra i due archi.

a. Se l'angolo $A\hat{C}B$ misura 40°, quanto misura l'angolo $A\hat{B}C$ segnato?



A. 50°
B. 60°
C. 70°
D. 140°

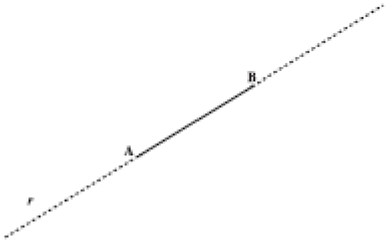
b. Scrivi il procedimento che hai seguito:

Risultati in percentuale						
Ambito	Domanda	Omissioni	Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
Spazio e figure	D19_a	7,6	6,3	11,3	69,2	5,6
	D19_b		Corretta	Parz. corretta	Non corretta	
		10,5	35,4	11,8	42,3	

Il quesito descrive una costruzione geometrica di un triangolo isoscele con il compasso. Allo studente è richiesto di comprendere la costruzione di cogliere che, mantenendo il compasso aperto della stessa misura, i raggi dei due cerchi sono uguali e quindi il triangolo è isoscele.

La squadra (Classe III secondaria di primo grado, a.s. 2009-2010)

D12. **Qui sotto vedi una retta *r* sulla quale sono segnati due punti A e B. Disegna un triangolo rettangolo ABC in modo tale che il segmento AB sia un cateto. Indica con una crocetta l'angolo retto del triangolo.**



Risultati in percentuale				
Ambito	Domanda	Omissioni	Corretta	Non corretta
Spazio e figure	D12	5,2	68,4	26,4

Il quesito evoca l'uso della squadra per la costruzione di un triangolo rettangolo avente un cateto lungo AB.

La calcolatrice tascabile (Classe I secondaria di primo grado, a.s. 2009-2010)

D28. **Se sulla tastiera di una calcolatrice tascabile digito**

$$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}$$

ciò corrisponde a:

- ☐ A. 24
- ☐ B. 3^8
- ☐ C. 8^3
- ☐ D. 243

Risultati in percentuale						
Ambito	Domanda	Omissioni	Opzione A	Opzione B	Opzione C	Opzione D
Numero	D28	2,7	7,8	75,6	4,4	9,44

In questo caso lo studente deve interpretare l'operazione sulla calcolatrice in termini di moltiplicazione ripetuta e passare alla scrittura aritmetica con le potenze.

Come si vede da questi esempi, quasi tutti gli strumenti matematici tipici della scuola del primo ciclo sono presenti nelle prove INVALSI in accordo con le raccomandazioni espresse dall'UMI-CIIM.

Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza e nel supporto alla comprensione del nesso tra idee matematiche e cultura assumono i contesti ludici e gli strumenti, dai più semplici come i materiali manipolabili (ad es., il compasso o il righello), fino agli strumenti tecnologici più complessi (tipicamente il computer o le calcolatrice numeriche e simboliche, ma anche le 'macchine', nel senso più ampio del termine, dagli orologi al distributore di bibite,ecc.). (UMI-CIIM, *La Matematica per il cittadino 2001*, p. 28).

13.4. Le linee guida per il PISA 2012: Matematica

Nella rilevazione PISA del 2012 il focus sarà la competenza matematica e parte dei quesiti saranno *computer-based*, risolvibili con l'ausilio del computer. Gli item per il PISA devono essere accompagnati da alcune considerazioni richieste dal Consorzio Internazionale:

- il riferimento al quadro di riferimento sulla *mathematical literacy;*
- descrizione dell'item che si propone e delle forme con le quali deve essere presentato;
- una discussione sui fattori che contribuiscono alla difficoltà dell'item e che ne indicano la competenza richiesta secondo la scala PISA per la matematica.

Il quadro di riferimento per la matematica descrive il modo nel quale il dominio matematico è concepito per gli scopi valutativi del PISA e rappresenta il contesto al quale gli item devono collegarsi. Il precedente PISA framework definiva la competenza matematica, *mathematical literacy*, come:

Student's capacity to understand and to engage in Mathematics and make well-founded judgments about the role Mathematics plays, as needed for an individual's current and future private life, occupational life, social life with peers and relatives, and life as a constructive, concerned and reflective citizen. (OECD 2010, p. 12).

La definizione e la descrizione della *mathematical literacy* per il PISA 2012 è in fase di revisione; la nuova versione, non definitiva, è la seguente:

Mathematical literacy is an individual's capacity to recognise, do and use mathematics, including to reason mathematically, in a variety of contexts, and to identify the role that mathematics plays in the world by describing, modelling, explaining and predicting phenomena. It is a continuum – thus more mathematically literate individuals are better able to use mathematics and mathematical tools to make the well-founded judgements and decisions required by constructive, engaged and reflective citizens. (OECD 2010, p. 12).

L'aspetto di matematizzazione viene accentuato e meglio definito (*describing, modelling, explaining and predicting phenomena*); si evidenzia il ruolo delle forme tipiche del pensiero matematico (*to reason mathematically*) e si esplicita che la matematica non è solo strumento di comprensione della realtà (*to use mathematics and mathematics tools*), ma anche oggetto culturale. La proposta PISA 2012 specifica meglio le competenze che costituiscono il cuore della *mathematical literacy* (OECD 2010, p. 13):

- *Overall mathematical literacy: the current (PISA 2003, 2006, 2009) scale.*
- *Translation: mathematising and de-mathematising. Operates in the 'real world' and at the interface between the real and mathematical worlds.*
- *Solution: working within mathematics. Solving, processing, checking, justifying.*

Lo schema, non ancora definitivo, è rappresentato in Fig. 6.

Nella rilevazione del 2012 verrà valutata anche la competenza relativa all'uso del computer come strumento di risoluzione di problemi. Per questo motivo si stanno costruendo quesiti non direttamente (o facilmente) risolvibili con carta e matita, nei quali siano ben definiti i vantaggi dell'uso del computer nella soluzione. Tali quesiti, quindi, non devono essere test tradizionali semplicemente presentati con il computer, ma l'uso di quest'ultimo deve rappresentare un valore aggiunto nella risoluzione del problema. Potrebbe essere, ad esempio, un quesito che presenta una situazione problematica con un'animazione geometrica come ad esempio la rappresentazione di modelli tridimensionali manipolabili con il computer. Gli strumenti informatici includono l'uso di fogli elettronici, di strumenti di disegno geometrico di misura, e di software di manipolazione di funzioni algebriche.

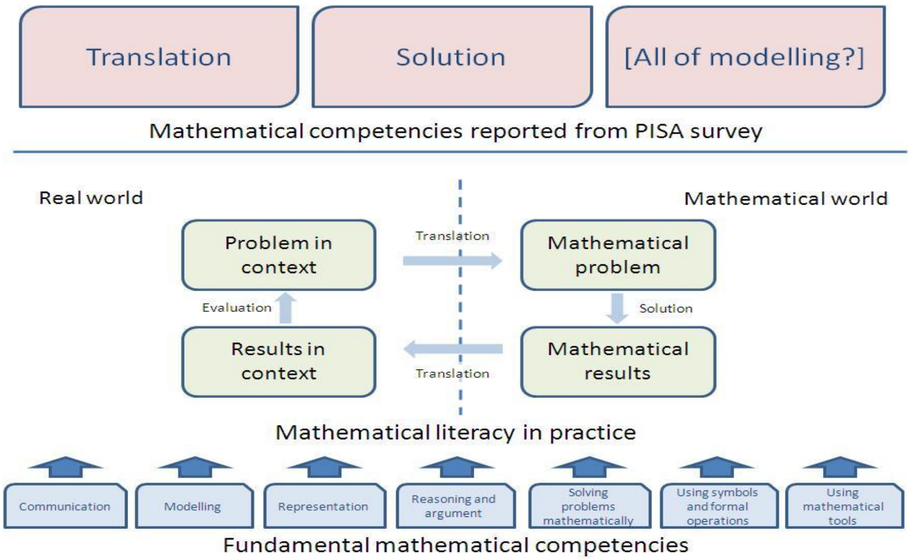


Figura 6 - Mathematical literacy per PISA 2012 (versione non definitiva) (OECD 2010, p. 13).

13.5. Una proposta di prova PISA sul pantografo di Scheiner: analisi a priori

Tenuto conto degli elementi la prova PISA sul pantografo di Scheiner è stata progettata per essere realizzata su piattaforma informatica con una animazione in Geogebra, un software libero di geometria dinamica.

La prova sarà descritta nelle sue singole parti stimolo e item.

Come in tutte le prove PISA gli item sono introdotti da uno stimolo che spiega e fornisce informazioni circa il contesto e il contenuto degli item. In questo caso viene presentato lo strumento, il pantografo di Scheiner. Nella descrizione si esplicita la funzione dello strumento e le sue caratteristiche come artefatto.

La figura è costruita con il software Geogebra e consente un'animazione. Muovendo il punto D (puntatore) si muove anche il punto P (tracciatore).

PANTOGRAFO DI SCHEINER

Il pantografo di Scheiner è uno strumento che può essere usato per copiare, rimpicciolire e ingrandire disegni. Un esempio di questo tipo di pantografo è rappresentato in Figura 1: un sistema articolato formato da quattro aste uguali incernierate fra loro nei punti A,B, C, D in modo da formare un rombo ADCB con il lato uguale alla metà delle aste. L'apparecchio viene imperniato in O al piano. I punti D e P sono tracciatori nei quali si può mettere una matita per disegnare.

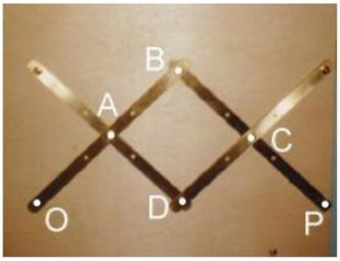
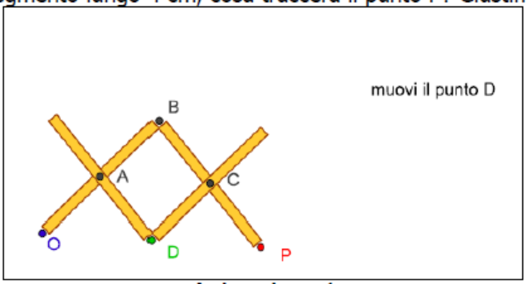


Figura 1

Figura 7 - Lo stimolo

Domanda 1: PANTOGRAFO

Se D disegna un segmento lungo 4 cm, cosa traccerà il punto P? Giustifica la tua risposta.



Animazione 1

a)

- ☐ A Un segmento di 2 cm
- ☐ B Un segmento di 4 cm
- ☐ C Un segmento di 6 cm
- ☐ D Un segmento di 8 cm

Figura 8 - Item 1

La domanda riguarda il funzionamento della macchina; gli studenti muovendo l’animazione devono comprendere che quando il punto D traccia un segmento il punto P ne traccia uno di lunghezza doppia, quindi la risposta corretta è la risposta D (8 cm). Le altre risposte corrispondono a possibili errori che gli studenti potrebbero fare: la risposta A

(2 cm) corrisponde allo scambio fra puntatore e tracciatore; la risposta B (4 cm) a un ragionamento basato sul fatto che le distanze OD e DP sono uguali e quindi gli studenti non vedono l'ingrandimento; la risposta C (6 cm) corrisponde a un ingrandimento, ma secondo un rapporto sbagliato, quindi lo studente vede l'ingrandimento, ma non collega l'ingrandimento con le caratteristiche geometriche della macchina (la distanza OP è doppia di quella OD). Nell'item si chiede di giustificare la risposta e vengono accettate come corrette le seguenti risposte:

- Lo studente fa riferimento alla distanza di P da O rispetto a quella di D da O: *PO è il doppio di OD;* oppure *OD è la metà di PO*.
- Lo studente fa riferimento alle dimensioni dei triangoli: *il triangolo AOD ha le dimensioni che sono la metà del triangolo ABP* oppure *il triangolo ABP ha le dimensioni doppie di AOD.*
- Lo studente fa riferimento diretto alle trasformazioni geometriche*: è un'omotetia di centro O e rapporto 1:2.*

In tutti i casi il referente è di tipo geometrico; la giustificazione non può essere del tipo "*si vede che raddoppia*", ma deve esserci un riferimento alle caratteristiche geometriche della macchina o alla matematica in essa incorporata (trasformazione omotetica).

Secondo le linee guida PISA, l'item è classificato nel seguente modo:

- *Scopo dell'item*: esplorazione virtuale dell'artefatto con l'obiettivo di trovare le relazioni fra due segmenti in una trasformazione geometrica (omotetia). Lo studente deve mettere in relazione le caratteristiche geometriche dell'artefatto con l'esplorazione virtuale al computer.
- *Contenuto*: spazio e forma.
- *Contesto*: occupazionale.
- *Tipo di item*: a risposta multipla con giustificazione.
-

Domanda 2: PANTOGRAFO

Il pantografo è ancora utilizzato dai gioiellieri per incidere i nomi su medagliette o braccialetti usando degli stampi che seguono con uno dei tracciatori del pantografo mentre l'altro incide sul metallo. Possono in questo modo riprodurre con minor fatica e maggior precisione un nome o un simbolo in formato ridotto. In quale dei tracciatori deve essere messa la punta per incidere in formato ridotto?

a) Risposta ________________

b) Perché ____
____

Figura 9 - Item 2

L'item riguarda il funzionamento della macchina; si chiede di immaginare come utilizzare la macchina per avere un'immagine rimpicciolita, un'omotetia di rapporto 2:1. Si chiede inoltre di giustificare la risposta, in questo caso il riferimento è all'ipotesi di funzionamento della macchina che gli studenti dovrebbero aver fatto nell'item 1.

La risposta corretta è D, cioè per avere un'immagine ridotta della metà il tracciatore deve essere messo nel punto D, quindi tracciatore e puntatore devo essere scambiati. Per quanto riguarda la giustificazione sono accettate come risposte corrette sia quelle che fanno riferimento alle caratteristiche geometriche della macchina come nel punto precedente, sia risposte che fanno riferimento al funzionamento della macchina, come ad esempio "*scambiando puntatore e tracciatore ottengo una figura ridotta*".

Secondo il quadro di PISA l'item è classificato così:

- Scopo dell'item: esplorazione virtuale dell'artefatto con l'obiettivo di trovare le modalità di funzionamento del pantografo.
- Contenuto: spazio e forma.
- Contesto: occupazionale.
- Tipo di item: a risposta aperta univoca con giustificazione.

Poiché l'item 2 in qualche modo era collegato all'item 1, per la versione finale predisposta per il Consorzio Internazionale è stato modificato in modo da renderlo indipendente dall'item 1.

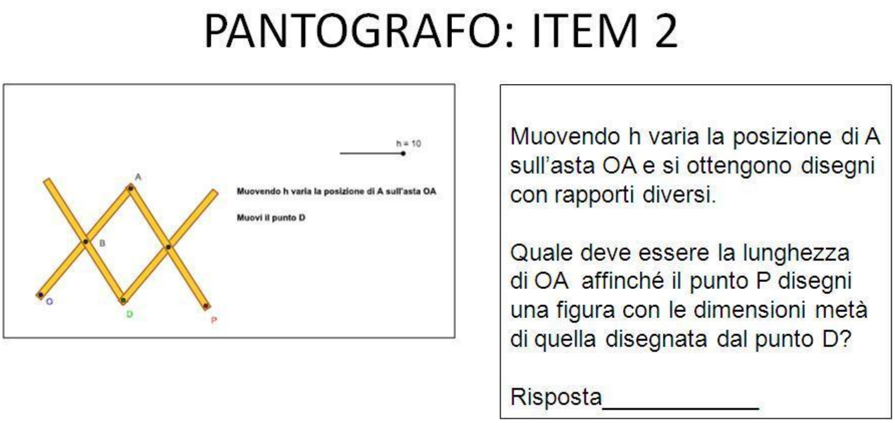


Figura 10 - Item 2 bis

Così modificato l'item risulta indipendente dall'item 1; attraverso la manipolazione dell'immagine virtuale gli studenti possono modificare la posizione di A sull'asta OA e quindi modificare il rapporto di omotetia. Si richiede di determinare la lunghezza di OA quando il pantografo disegna con il tracciatore P una figura di dimensioni dimezzate rispetto a quella disegnata dal puntatore D. Gli studenti devono cambiare la lunghezza di OA ed esplorare l'artefatto. E scoprire che per avere un'immagine ridotta della metà la lunghezza di OA deve essere 2,5 e il punto P viene a trovarsi fra O e D. La domanda comporta una modifica virtuale del pantografo.

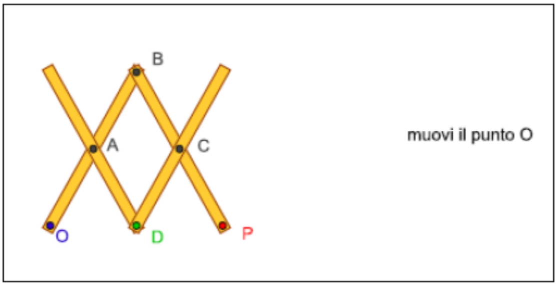
Secondo le linee guida del PISA l'item è così classificato:

- Scopo dell'item: esplorazione virtuale dell'artefatto con l'obiettivo di modificarlo secondo la richiesta dell'item. Lo studente deve trovare la lunghezza dell'asta in relazione al rapporto di omotetia richiesto.
- Contenuto: spazio e forma.
- Contesto: occupazionale.
- Tipo di item: a risposta aperta univoca.

L'item 3 (Fig.11) richiede di esplorare virtualmente un pantografo modificato e di collegare tale esplorazione con il possibile prodotto della macchina modificata. La richiesta è complessa e si colloca tra le attività matematiche come situazione di problem solving. Se il punto fisso è D, e O e P fungono da tracciatori, il pantografo cambia completamente natura e diventa un pantografo che disegna una trasformazione isometrica e in particolare una simmetria centrale, con centro in D. La risposta corretta è A (Figura 1, simmetria centrale). Le altre risposte corrispondono a possibili errori dello studente: la risposta B (Fig. 2, traslazione) corrisponde ad una traslazione, lo studente si rende conto che la trasformazione dovrà essere isometrica perché le distanze DO e DP sono uguali, ma non riesce a cogliere il movimento della macchina. La risposta C (Fig. 3, simmetria assiale) corrisponde sempre ad un'isometria, come nel caso precedente, ma il movimento della macchina non viene compreso, anche se si intuisce un cambiamento nelle posizioni della figura trasformata. La risposta C (Figura 4, omotetia) può essere scelta dagli studenti più deboli in quanto non tiene conto assolutamente della modifica apportata al pantografo. La richiesta di giustificazione è utile per capire come gli studenti ragionano in un item di questo tipo.

Domanda 3: PANTOGRAFO

Immagina che ora il pantografo sia imperniato al piano nel punto D, e che O e P siano i tracciatori.



a) Se O disegna la lettera , come saranno le figure disegnate? Giustifica la tua risposta

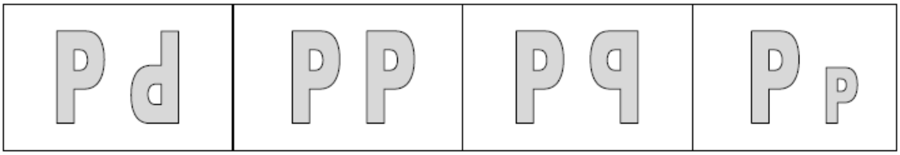


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

☐ A Figura 1
☐ B Figura 2
☐ C Figura 3
☐ D Figura 4

b) Spiega perché escludi le altre Figure:

____

____

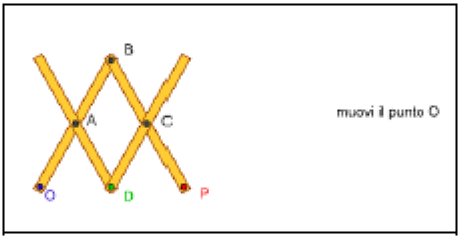
Figura 11 - Item 3

Secondo le linee guida del PISA l'item è così classificato:

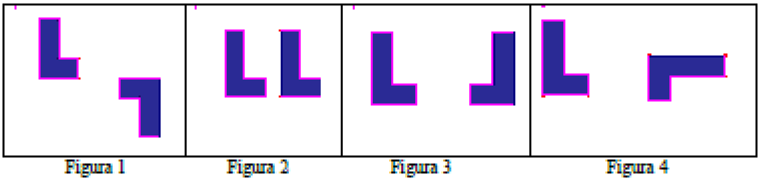
- Scopo dell'item: lo studente deve connettere il movimento del nuovo artefatto e connettere tale cambiamento con la trasformazione geometrica che si ipotizza possa produrre (simmetria centrale).
- Contenuto: spazio e forma.
- Contesto: occupazionale.
- Tipo di item: a scelta multipla con giustificazione.

Di questo item è stata costruita anche una versione modificata (Fig. 12) nella quale tutte le risposte sono isometrie, questo perché la risposta D sembrava troppo diversa dalle altre e quindi debole come distrattore, in particolare per gli studenti che avevano già utilizzato in precedenza il pantografo.

Domanda 3: PANTOGRAFO
Immagina che ora il pantografo sia imperniato al piano di appoggio nel punto D, e che O e P siano i tracciatori.



a) Il punto fisso al piano di appoggio è ora D; il puntatore è O e il tracciatore è P. Se O disegna la lettera L, come saranno fra loro i disegni? Scegli la Figura corretta.



- ☐ A Figura 1
- ☐ B Figura 2
- ☐ C Figura 3
- ☐ D Figura 4

b) Spiega perché escludi le altre Figure:

____

____

Figura 12 - Item 3bis

Questi cambiamenti (item 2bis e item 3bis) sono il frutto dell'interazione con il gruppo tecnico dell'INVALSI che si occupa del progetto OCSE-PISA. In conclusione sono state predisposte tre versioni della domanda sul pantografo:

- Versione 1 (costituita dagli item 1, 2 e 3 senza modifiche).
- Versione 2 (costituita dagli item 1, 2 e 3bis).
- Versione 3 (costituita dagli item 1, 2 bis e 3 bis).

Al Consorzio Internazionale del progetto OCSE-PISA è stata inviata la Versione 3 della domanda sul pantografo, mentre nella sperimentazione sono state utilizzate la Versione 1 e la Versione 2.

13.6. Il disegno della sperimentazione e le ipotesi di ricerca

La predisposizione di questa domanda per il progetto PISA 2012 si è rivelata anche un' occasione per una sperimentazione in alcune classi del progetto MMLab-ER con insegnanti disponibili a effettuare la prova nelle loro classi.

L'idea di fondo è quella di confrontare le differenze nelle risposte alla domanda tra studenti che avevano in precedenza svolto attività di laboratorio con il pantografo di Scheiner e studenti che non avevano mai visto un pantografo di Scheiner. Ai primi è stata sottoposta la versione cartacea della domanda, ai secondi la versione della domanda implementata sul computer, rendendo così possibile l'esplorazione virtuale attraverso la costruzione di un'animazione con il software Geogebra. La maggior parte degli studenti era di seconda secondaria di primo grado, salvo una classe di scuola secondaria di secondo grado, e per la precisione un Istituto Professionale.

Lo schema della sperimentazione è stato il seguente:

Situazione didattica	*Cartacea/ computer*	*Versione domanda*	*Docente*	*Classe*	*N° studenti*
Studenti che avevano fatto precedenti esperienze con pantografo di Scheiner.	cartacea	V1 Item 1 Item 2 Item 3	Concu	II sec. di I grado I.C. di San Matteo della Decima (Bo)	23
	cartacea	V1 Item 1 Item 2 Item 3	Tacconi	II sec. di I grado I.C. "Montano - D'Acquisto" Bologna	18
	cartacea	V1 Item 1 Item 2 Item 3	Frolloni	II sec. di II grado IPSIA "Fioravanti" Molinella (Bo)	17
Studenti che non avevano mai visto il pantografo di Scheiner	computer	V2 Item 1 Item 2 Item 3bis	Banchelli	II sec. di II grado "Visitandine" Castel San Pietro Terme (Bo)	12

Come si può vedere la situazione è sbilanciata, infatti una sola classe ha fatto la prova con l'ausilio del computer. Questo è dipeso dalla reticenza degli insegnanti nell'uso del computer per una verifica, dalla difficoltà a reperire un laboratorio di informatica che disponesse di un computer per ogni allievo e soprattutto dal fatto che la prova al computer comportava un impegno maggiore per il docente, che in questo caso avrebbe dovuto scaricare su ogni computer il software necessario (Geogebra) e inserire la versione computer-based della prova con tutte le animazioni.

Le ipotesi alla base del disegno della ricerca sono le seguenti:

a) l'uso del computer può costituire un valore aggiunto nella risoluzione degli item della domanda? In altre parole, la possibilità di esplorare un artefatto, anche se in modo virtuale, favorisce la produzione di ipotesi e la soluzione di problemi collegati a eventuali modifiche della macchina matematica?

b) Aver fatto esperienze con il pantografo di Scheiner rappresenta un prerequisito significativo nella risoluzione degli item? Quanto di ciò che hanno appreso in altro contesto gli studenti sono in grado di utilizzare per rispondere agli item della domanda sul pantografo?

c) Ci sono differenze fra i due gruppi esaminati in relazione alle tipologie di risposte date ai differenti item? In particolare l'analisi a priori ha messo in luce le possibili differenze di approccio agli item 1 e 2 da un lato e all'item 3 dall'altro. Tale analisi trova conferma nelle risposte degli studenti dei due gruppi?

13.7. Analisi dei risultati

I protocolli degli studenti sono stati analizzati in accordo con il quadro teorico di riferimento del progetto MMLab-ER, in particolare si è tenuto conto della definizione di strumento secondo il quadro di Rabardel nel quale lo strumento è visto come

> un'entità mista composta sia da componenti legate alle caratteristiche dell'artefatto che da componenti soggettive (*schemi d'uso* messi in campo da un soggetto quando è assegnato un compito da risolvere con l'aiuto di un artefatto). (Rabardel & Samurçay, 2001).

Gli schemi d'uso dipendono dall'artefatto, possono variare a seconda del compito e, per lo stesso compito, variano da individuo a individuo. Per quanto riguarda le linee guida dell'esplorazione di una macchina matematica, si può osservare i diversi item fanno riferimento alle domande individuate come cruciali nell'esplorazione di una macchina matematica (vedi cap. 8) e alle attività matematiche collegate. Nella schema sottostante si è cercato di collegare gli item della prova con le domande guida dell'esplorazione e con gli elementi del quadro teorico preso in considerazione.

Quadro teorico	**Domande chiave**	**Prova pantografo**
Artefatto	*Come è fatto?*	Stimolo domanda
Strumento	*Cosa fa?*	Item 1a e 2a
Congetturare e dimostrare	*Perché lo fa?*	Giustificazione item 1b e 2b
Risoluzione di problemi	*Cosa succederebbe se …?*	Item 3 (a e b)

Le giustificazioni fornite dagli studenti sono state classificate utilizzando i seguenti criteri in accordo con l'analisi a priori:

- *Geometrico*: quando l'argomentazione fa riferimento esclusivamente alle relazioni geometriche individuate nelle diverse componenti del pantografo. L'argomentazione è di tipo statico nel senso che non si fa nessun riferimento esplicito al movimento (reale o virtuale) della macchina. Un esempio è il seguente, relativo all'item 1 "*8 cm, perché OP è il doppio di OD*".
- *Funzionale*: quando l'argomentazione fa riferimento al funzionamento del pantografo come strumento che produce trasformazioni geometriche nel piano. Un esempio è "*cm 8, perché questa macchina ingrandisce del doppio*".
- *Dinamico*: quando l'argomentazione fa riferimento al modo con il quale gli elementi della macchina (puntatore e tracciatore) si muovono, oppure al modo con il quale le figure vengono trasformate dal movimento del puntatore e tracciatore. Un esempio è "*8 cm, perché se muovi D, si muove anche P, del doppio*".

La descrizione dei processi messi in atto dagli studenti viene presentata per ognuno dei singoli item.

13.7.1. Pantografo - item 1: cosa fa e perché?

La maggior parte degli studenti ha risposto correttamente all'item indipendentemente dal fatto che avessero o meno visto lo Scheiner in precedenza: nei risultati quindi non ci sono sostanziali differenze tra gli studenti che utilizzano la versione cartacea (avendo in precedenza utilizzato il pantografo) e chi utilizza la versione computer-based (non avendo mai visto in precedenza il pantografo). Per quanto riguarda i processi messi in atto si può osservare che le argomentazioni a sostegno della risposta data sono per lo più di tipo *geometrico* o *funzionale* nelle classi di scuola secondaria di primo grado e prevalentemente di tipo *geometrico* nella classe di scuola secondaria di secondo grado. Quasi nessuno produce argomentazioni di tipo *dinamico*, come ipotizzato nell'analisi a priori dell'item.

Vediamo qualche esempio di argomentazione prodotta dagli studenti:

Il punto P traccerà un segmento pari al doppio perché è posizionato al doppio della distanza di D rispetto al punto O (T4).

Perché la macchina è fatta in modo da rappresentare due figure simili una la metà dell'altra perché i suoi segmenti sono una la metà dell'altra (T11).

Il rombo del pantografo ha i lati che sono la metà delle aste, perciò se noi vogliamo disegnare qualcosa con il punto D, il punto P costruisce la stessa immagine raddoppiata in grandezza (B7).

Queste argomentazioni sono tutte di tipo *geometrico*, e fanno riferimento o alle caratteristiche geometriche della macchina (rapporto fra le aste, distanza dei tracciatori dal punto fisso), oppure alla trasformazione geometrica che la macchina effettua. Nel protocollo T11 il riferimento all'esperienza pregressa sul pantografo di Scheiner è abbastanza evidente. Pochissimi studenti, in tutte le classi esaminate, hanno avuto come riferimento il movimento del pantografo (referente *dinamico*) per rispondere all'item 1. Anche nella classe dove la prova si è svolta al computer e quindi era possibile un'esplorazione virtuale del pantografo solo due studenti su 12 hanno utilizzato questa modalità argomentativa. Nell'esempio sotto riportato si coglie l'esplorazione virtuale del pantografo al computer.

Perché se muovi D si muove anche P. Tutto quello che il punto D fa viene automaticamente fatto anche da P, solo che quello che D fa, in P è il doppio più grande (B2).

Nel secondo esempio si capisce che lo studente immagina di 'chiudere' virtualmente il pantografo fino a far coincidere il punto P con il punto O.

Se D è di 4 cm e non si ferma nel punto C [non è bloccato in C] allora il segmento con inizio in P non si fermerà nei punti A e C, ma alla fine del punto O (F13).

È interessante osservare che nei pochi casi in cui i ragazzi hanno risposto in modo non corretto a questo item, il processo seguito è di tipo *dinamico*:

Perché quando la mina scrive quella che la segue è sempre la metà della scritta fatta (risposta A = 2 cm) (T3).

Un altro tipo di argomentazione che ha come referente il funzionamento del pantografo (aspetto *funzionale*) è stato prodotto da un numero abbastanza alto di studenti, in particolare nelle classi che avevano avuto esperienza con il pantografo.

Perché il tracciatore P è quello che riproduce l'immagine più grande e D riproduce disegna l'immagine a metà, oppure se si disegna con D allora P riproduce l'immagine grande il doppio (T12).

Perché se si mette la mina in P la figura si ingrandisce del doppio, mentre se la mina si mette in D la figura si rimpicciolisce della metà (C15).

Perché facendo riferimento alla funzione principale del pantografo si può dedurre che la misura del segmento disegnato con il punto P sia il doppio del segmento disegnato con il punto D (B6).

È interessante notare che quando gli studenti fanno riferimento al funzionamento della macchina e hanno avuto esperienze con il pantografo, in genere sono in grado di spiegare cosa succede scambiando tracciatore con puntatore, in altre parole, insieme all'item 1, rispondono anche all'item 2 (T12 e C15).

Analizzando più in profondità i risultati relativi all'item 1 attraverso il confronto fra le classi che utilizzano la versione cartacea della domanda, ma che hanno avuto esperienze precedenti con il pantografo di Scheiner, e la classe che ha la possibilità di esplorare il pantografo al computer, ma non ha mai visto il pantografo reale, si può osservare che non ci sono sostanziali differenze. Possiamo perciò affermare che, relativamente a questo item, l'esplorazione al computer sostituisce l'esperienza diretta con la macchina.

Dal punto di vista dei riferimenti utilizzati nell'argomentazione prevale il riferimento all'aspetto *geometrico* e a quello *funzionale* della macchina, quest'ultimo naturalmente legato all'esperienza pregressa; infatti gli studenti della classe che utilizza il computer argomenta la propria risposta facendo prevalentemente riferimento alle caratteristiche geometriche del pantografo, mentre il riferimento al funzionamento del pantografo è molto presente nelle classi che avevano usato il pantografo.

A ulteriore conferma dell'importanza dell'esplorazione (reale o virtuale) del pantografo come condizione per la risoluzione dell'item 1, si può portare l'esempio di una quarta classe di scuola secondaria di secondo grado (Liceo Scientifico) che non è stata inserita nel disegno sperimentale in quanto l'età degli studenti e soprattutto le competenze matematiche possedute erano molto distanti da quelle di studenti di seconda secondaria di primo grado o di studenti di un Istituto Professionale. A questa classe è stata proposta la domanda in versione cartacea, ma non avevano mai visto o utilizzato il pantografo di Scheiner. In particolare l'item 1 si è per loro rivelato estremamente difficile in quanto avrebbero dovuto immaginare il possibile movimento di uno strumento sconosciuto e il referente geometrico non è stato di aiuto. Quasi tutti gli studenti hanno interpretato l'immagine del pantografo come figura geometrica statica e non come immagine di uno strumento dinamico. Un solo studente ha risposto correttamente all'item 1 con un ragionamento di tipo geometrico, ma riferito all'artefatto, cioè al pantografo rappresentato nello stimolo della domanda.

Il segmento che va a tracciare P deve essere di 8 cm in quanto O deve rimanere fisso ed essendo OD la metà di OP allora il segmento formato da D è il doppio di quello formato da D (M1).

Tutti gli altri hanno cercato di ritrovare nell'immagine del pantografo (vista come disegno geometrico e non come rappresentazione di un artefatto) elementi geometrici noti, ma non coerenti con la descrizione del pantografo nello stimolo della domanda:

Secondo me muovendo il punto D, il punto C [si chiedeva cosa tracciava P] traccerà un arco di ellisse. Guardando la figura possiamo infatti notare che i punti A e C del pantografo costituiscono i fuochi dell'ellisse (M3) (Fig.13).

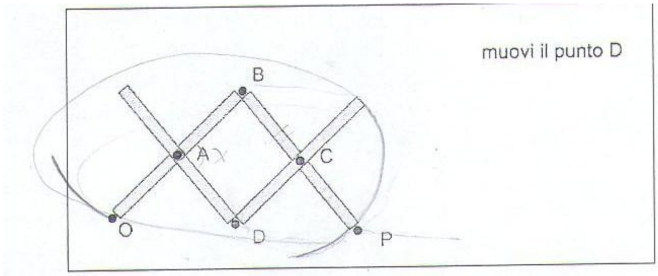


Figura 13 – Il protocollo di M3

Se consideriamo i triangoli OAD e DCP sappiamo che i lati OA, OD, DC e DP sono di uguale lunghezza, perciò i due triangoli fra loro sono congruenti. Affermato ciò potremo dire che se OD è un segmento di 4 cm, DP essendo uguale a OD sarà di 4 cm per cui OP sarà il doppio di OD cioè 8 cm (M2).

In questo ultimo caso lo studente utilizza un linguaggio geometrico molto forte, analizza l'immagine del pantografo come figura geometrica e conclude che OP è il doppio di OD, che non era ciò che era richiesto dall'item; la struttura linguistica è apparentemente simile a quella di una dimostrazione geometrica, in realtà la sostanza delle affermazioni è semplicemente di osservazione della figura. Analizzando i protocolli di questa classe si può dire che gli studenti, non avendo mai utilizzato il pantografo o non potendo esplorarlo virtualmente, non sono riusciti a fare il passaggio dall'artefatto allo strumento.

L'esempio di questa classe conferma che questa domanda richiedeva come condizione necessaria, ma non sufficiente, per la sua risoluzione o l'esperienza pregressa con il pantografo o la possibilità dell'esplorazione virtuale della macchina matematica.

13.7.2. Pantografo – item 2: cosa fa e perché?

L'item 2, nella prima versione si è rivelato poco efficace dal punto di vista dell'analisi dei comportamenti degli studenti. A questo quesito hanno risposto correttamente tutti quelli che avevano risposto correttamente all'item 1, confermando l'osservazione nell'analisi a priori che i due item erano fra loro collegati. L'unica osservazione che si può fare è che gli studenti che fanno riferimento al funzionamento della macchina, collegano esplicitamente l'item 1 e 2 come se fossero un tutt'uno con le caratteristiche *funzionali* del pantografo.

Perché [D] è il punto più vicino a dove è imperniato il piano, mentre P è il più lontano (F5).

Tracciando con P viene il disegno grande, tracciando con D viene il disegno simile a quello grande ma dimezzato (F15).

Gli studenti che utilizzano il referente *geometrico* rispondono con gli stessi argomenti utilizzati per l'item 1.

Se riproduci una figura con P, D la disegna più ridotta ed esattamente la metà (T1).

Il segmento AD o CD è la metà di BP perciò la punta deve essere messa nel punto D per avere la riduzione (T6).

Nelle giustificazioni degli studenti che utilizzano il computer si osservano tracce dell'esplorazione virtuale del pantografo.

Quando sposto il punto D a sinistra il punto P [il segmento disegnato da P] diventa più lungo e se invece lo sposto a destra è più piccolo il punto P [il segmento disegnato da P] (B6).

13.7.3. Pantografo – item 3: cosa succederebbe se …?

L'item 3, come previsto nell'analisi a priori precedentemente fatta, si è rivelato l'item più difficile per gli studenti, infatti la maggior parte degli studenti, anche con esperienza pregressa con il pantografo, ha risposto in modo non corretto alla domanda: gli studenti non sono riusciti a collegare la variazione alla struttura del pantografo con la trasformazione che tale modifica produce. Per rispondere alla domanda era necessario riuscire a immaginare il movimento del pantografo modificato per intuire che la trasformazione prodotta era una simmetria centrale con centro in D, quindi l'approccio privilegiato per questo item era di tipo *dinamico*. Questi studenti hanno utilizzato un approccio prevalentemente di tipo *geometrico* o *funzionale*.

Perché OB e PB sono due lati uguali e quindi le figure verranno della stessa dimensione e per lo stesso verso (risposta non corretta B = Figura 2, traslazione) (T11).

Escludo la figura 4 perché visto che la distanza fra O e D e tra P e D è uguale non c'è un tracciatore che ingrandisce e uno che rimpicciolisce, escludo la figura 1 perché il movimento del tracciatore è lo stesso e la figura non può essere ribaltata; ed escludo la figura 3 perché i tracciatori non si muovono a specchio (risposta non corretta B = Figura 2, traslazione) (C23) (Fig. 14).

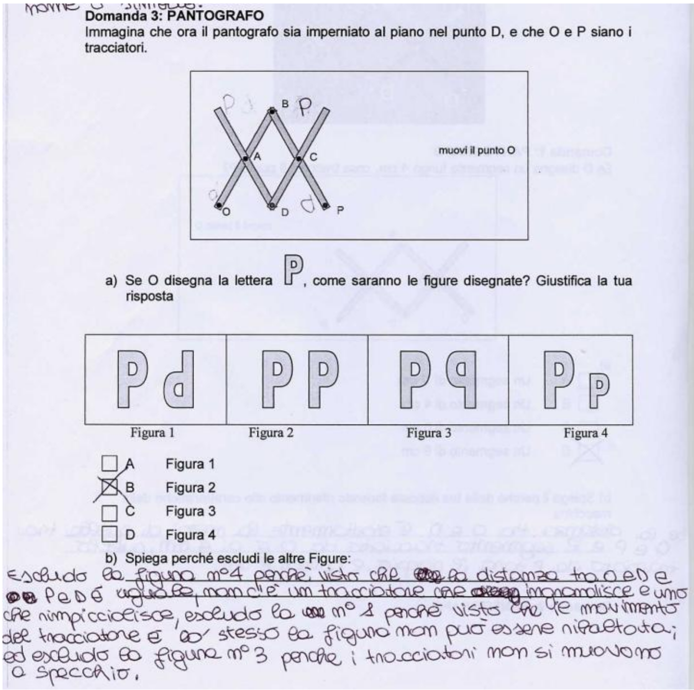


Figura 14 - Una risposta non corretta

Questi due esempi sono interessanti sotto diversi punti di vista. Entrambi gli studenti si rendono conto, analizzando le caratteristiche geometriche del pantografo modificato, che la soluzione deve essere una isometria; nel primo esempio il referente è prevalentemente *geometrico*, nel secondo esempio il referente è essenzialmente *funzionale*, lo studente cerca di immaginare il movimento ma le conclusioni che ne trae non sono corrette.

I pochissimi studenti che hanno utilizzato la versione cartacea e hanno risolto correttamente l'item (Risposta A = Figura 1, simmetria centrale) hanno prodotto argomentazioni di tipo dinamico.

Perché se O e P sono i due tracciatori e sono posizionati in modo opposto e alla stessa distanza da D le figure vengono riprodotte in modo contrario (T4).

Le altre figure sono da escludere perché le distanze OD e DP sono uguali (no figura 4) e se il puntatore O si muove verso il basso il tracciatore P si muove verso l'alto e viceversa (No figura 2 e 3. Sì figura 1) (C9).

Se faccio girare il punto 'P' in senso orario il punto 'O' gira in senso antiorario così le scritte vengono al contrario (F1).

L'aspetto più interessante relativo a questo item sono i risultati della classe che ha utilizzato la versione (item 3bis) al computer: nessuno degli studenti ha sbagliato la risposta a questo item. In questo caso la possibilità di manipolare virtualmente il pantografo modificato si è dimostrata sicuramente un valore aggiunto nella soluzione dell'item, molto più significativo della pregressa esperienza con il pantografo di Scheiner. Ecco alcuni esempi di giustificazioni prodotte dagli studenti.

Le figure 2, 3, e 4 non sono possibili perché se O viene spostato verso l'alto P va verso il basso e l'unica figura in cui avviene questo procedimento è la numero 1 (B2).

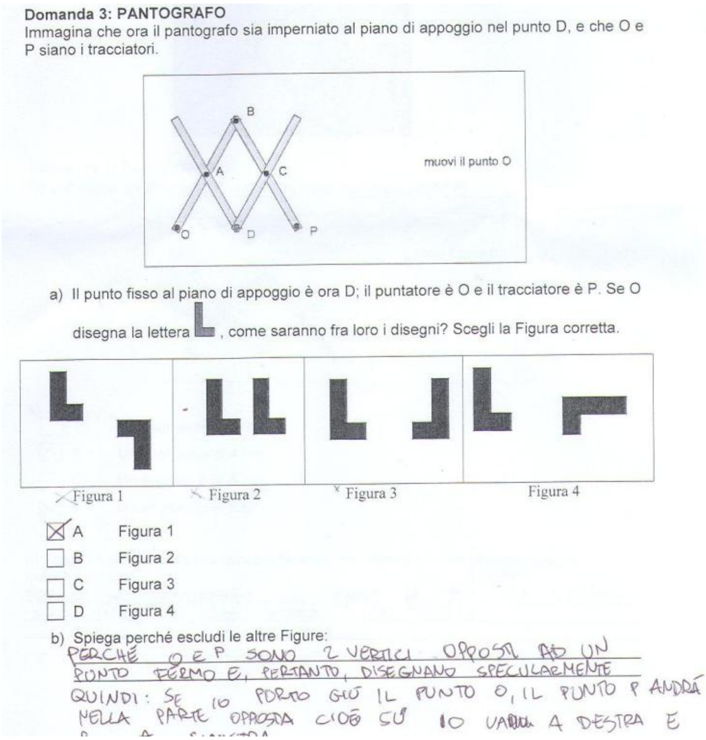
Escludo le altre figure perché O e P si muovono al contrario quindi se io muovo O in giù P si sposterà in su (B3).

Non avremmo mai potuto ottenere la figura 2 perché il punto B si sposta verso il basso, allora il punto P si sposta verso l'alto. Lo stesso ragionamento vale per la figura 3. Non avremmo mai potuto ottenere la figura 4 perché il punto O e il punto P disegnano nello stesso istante lo stesso segmento o figura e quindi nella figura 4 la posizione della seconda figura (con gamba corta rivolta verso il basso) è inverosimile proprio per quello che ho scritto sopra (B6).

Perché O e P sono due vertici opposti ad un punto fermo e, pertanto, disegnano specularmente quindi se io porto giù il punto O, il punto P andrà nella parte opposta cioè su: O va a destra e P a sinistra (B9) (Fig. 15).

Perché O e P si muovono al contrario quindi l'unica figura giusta è la 1 (B11).

Come si vede da questi esempi, il referente è prevalentemente *dinamico* e si scorge l'esperienza di manipolazione virtuale del pantografo nelle argomentazioni degli studenti.



Domanda 3: PANTOGRAFO
Immagina che ora il pantografo sia imperniato al piano di appoggio nel punto D, e che O e P siano i tracciatori.

a) Il punto fisso al piano di appoggio è ora D; il puntatore è O e il tracciatore è P. Se O disegna la lettera L, come saranno fra loro i disegni? Scegli la Figura corretta.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

- ☒ A Figura 1
- ☐ B Figura 2
- ☐ C Figura 3
- ☐ D Figura 4

b) Spiega perché escludi le altre Figure:
PERCHÉ O E P SONO 2 VERTICI OPPOSTI AD UN PUNTO FERMO E, PERTANTO, DISEGNANO SPECULARMENTE
QUINDI: SE IO PORTO GIÙ IL PUNTO O, IL PUNTO P ANDRÀ NELLA PARTE OPPOSTA CIOÈ SU IO VADO A DESTRA E

Figura 15 - Una risposta corretta

Nella figura sottostante sono riportate alcune immagini dell'attività su questo item al computer (Fig. 16).

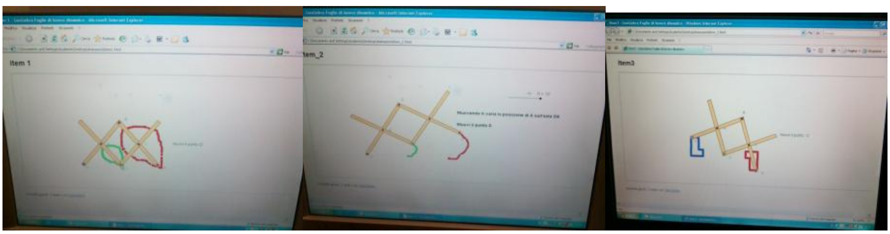


Figura 16 - Item 1, 2 e 3 nella versione computer-based

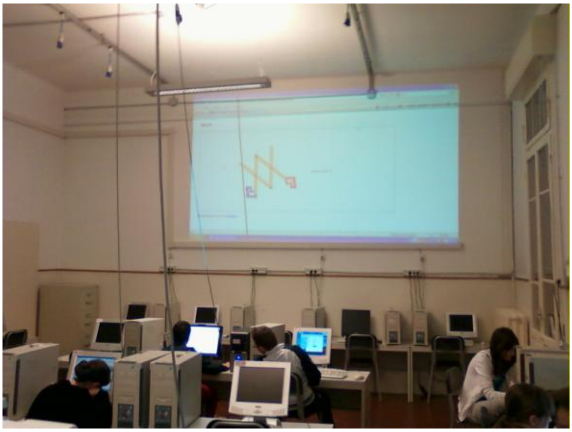


Figura 17 - Correzione collettiva della prova

Una visione complessiva dei risultati dell'esperimento è data nella seguente tabella:

Situazione didattica	*Item 1*	*Item 2*	*Item 3*
58 studenti che avevano fatto precedenti esperienze con pantografo di Scheiner. Versione cartacea	Corretta 45 (78%) Non corretta 13 (22%) *Geometrico* 34 *Dinamico* 4 *Funzionale* 20	Corretta 51 (88%) Non corretta 7 (12%) *Geometrico* 24 *Dinamico* 6 *Funzionale* 28	Corretta 8 (14%) Non corretta 50 (86%) *Geometrico* 23 *Dinamico* 6 *Funzionale* 29
12 studenti che non avevano mai visto il pantografo di Scheiner. Versione computer-based	Corretta 11 (91%) Non corretta 1 (9%) *Geometrico* 8 *Dinamico* 2 *Funzionale* 2	Corretta 12 (100%) Non corretta 0 (0%) *Geometrico* 4 *Dinamico* 5 *Funzionale* 3	Corretta 12 (100%) Non corretta 0 (0%) *Geometrico* 4 *Dinamico* 5 *Funzionale* 3

13.7.4. L'intervista a uno studente quindicenne

Il gruppo INVALSI che si occupa delle prove PISA ha testato la prova con alcuni studenti quindicenni, popolazione bersaglio dell'indagine OCSE-PISA, di una scuola di Roma, attraverso un' intervista in profondità. Questi studenti non avevano mai visto un pantografo ed è stata utilizzata la versione cartacea. La metodologia utilizzata è quella del 'pensare ad alta voce'. La regola principale di tale tecnica è di fare in modo che l'interlocutore possa rendere immediatamente esplicito ciò che pensa a bassa voce quando è concentrato su un problema e cerca di risolverlo. Questa tecnica prevede che vi sia contemporaneità tra processo mentale e verbalizzazione e la sua utilità si fonda sul fatto che "*thinking aloud will not change the course of cognitive processes*". (Ericsson-Simon, 1980, p. 227).

Lumbelli (1971) indica una serie di condizioni importanti per l'efficacia del "pensare ad alta voce": l'atteggiamento non valutativo, di accettazione da parte dell'intervistatore, il controllo delle sue manifestazioni espressive in modo da determinare un'atmosfera permissiva, non bloccante nei riguardi del comportamento verbale dello studente, la riduzione al massimo delle domande qualora si volessero ottenere ulteriori informazioni su un determinato punto e la sostituzione di quelle domande con interventi 'a specchio'che, riprendendo alcune affermazioni dello studente, lo invitino ad aggiungere qualcosa ad esse o a ridimensionarle, a seconda dei casi (Pozio, 2008, p. 216).

Si riporta l'intervista effettuata da un intervistatore del gruppo nazionale OCE_PISA ad uno studente, Francesco, quindicenne, di un Istituto Tecnico di Roma relativamente agli item 1 e 3.

Item1

Francesco: [legge ad alta voce lentamente il testo stimolo della domanda] Allora … che devo fare?

Intervistatore: rispondi all'item.

Francesco: se D disegna, D è il puntatore quindi da qui a qui dovrebbe essere di 4 cm.

Intervistatore: io non intervengo fai tu e cerca di dire quello che fai.

Francesco: imperniato vuol dire fissato?

Intervistatore: sì.

Francesco: se D è il puntatore … allora vuol dire che prima era chiuso? Da dove parte?

Intervistatore: parte da qua.

Francesco: io lo tiro e fa 4 cm [rilegge] cosa traccerà il punto P?

Francesco: non traccerà 4 cm uguale?

Intervistatore: attento, pensa da dove è partito.

Francesco: è il doppio perché prima erano sovrapposti.

Intervistatore: tu scrivilo, poi ci ragioniamo.

Francesco: allora, [silenzio].

Intervistatore: dimmi quale ragionamento fai.

Francesco: allora questo parte da qua, non è chiuso, faccio 4 cm …. allora però io allungandolo passo da qui a disegnare?

Intervistatore: eh sì, però attento c'è un punto … qual è il punto fermo di tutto ciò?

Francesco: allora c'è un punto fermo, quindi possiamo questo fa 4 cm e P, … non ne ho idea. Allora …

Intervistatore: immagina di fare una prova. Ti trovi davanti a questo.

Francesco: se questo è connesso a questo [O e P] mi si allunga, però allungandosi si abbassa anche così.

Intervistatore: fino a qui non ci piove.

Francesco: quindi non è 4 perché abbassandosi si allunga di più. La lunghezza del segmento 4 cm era … allora, eh allora … allora se questo si allunga l'altro fa così.

Intervistatore: il punto che non si muove qual è?

Francesco: O, questo è chiaro.

Intervistatore: quando questo si muove di 4 anche questo si muove in avanti e dove arriva?

Francesco: non ne ho idea, non so dove mettere le mani.

Intervistatore: devi per forza dare una risposta perché stai facendo un compito e se lo lasci in bianco ti penalizzano cosa rispondi?

Francesco: [ride] ok, allora…

Intervistatore: non importa se è sbagliato, non c'è il voto, ma devi per forza scrivere qualcosa.

Francesco: ok, devo per forza scrivere qualche cosa, devo anche giustificare il mio numero che dico?

Intervistatore: in teoria sì perché la domanda te lo chiede, ma facciamo un passo alla volta. Intanto l'istinto che cosa ti dice?

Francesco: a un primo impatto mi dice 4, però scusa, ma questo prima è chiuso e poi lo apro?

Intervistatore: no questo parte da così, poi disegna.

Francesco: però P disegna da dove stava prima o …?

Intervistatore: questi si muovono insieme perché la macchina è fatta così.

Francesco: allora dico 4 e basta.

Intervistatore: perché dici 4?

Francesco: perché se si muove di 4 anche l'altro si muove di 4.

Item 3

Francesco: il punto fisso al piano di appoggio è ora D [legge lentamente] il puntatore è O e il tracciatore P. Se O disegna la lettera L …, e io disegno L, faccio così e così [disegna] però questo è quello fisso?

Intervistatore: sì

Francesco: se io tiro di qua questo rimane fisso?

Intervistatore: sì

Francesco: allora se io tiro su [punto O], questo [punto P] si abbassa, quindi la Figura 1 [simmetria centrale]? Risposta 1.

La risposta all'item 1 non è corretta, mentre la risposta all'item 3 è corretta.

È interessante osservare che la difficoltà principale per Francesco è quella di capire e immaginare come si muove la macchina. La lunga intervista relativa all'item 1, che dura circa 10 minuti, è tutta centrata sul tentativo di capire come si muove il pantografo e il punto P mentre il punto D disegna. Si coglie inoltre che dovendo controllare nell'immaginazione due punti, D e P, che si muovono contemporaneamente questo crea ulteriore difficoltà. Alla fine lo studente in qualche modo getta la spugna rispondendo nel modo più plausibile, nonostante avesse dichiarato perplessità circa questa risposta.

L'item 3 risulta più semplice; in qualche modo il tentativo di esplorare mentalmente il pantografo nell'item 1 viene reinvestito nella soluzione dell'item 3 e l'intervista in questo caso dura poco più di 1 minuto.

Questo esempio conferma l'osservazione precedentemente fatta: la difficoltà principale per uno studente che non abbia mai visto un pantografo e non abbia possibilità di esplorarlo con l'ausilio del computer riguarda essenzialmente la necessità di immaginare un movimento. A differenza degli studenti di IV liceo scientifico analizzati sopra, Francesco non interpreta l'immagine del pantografo come figura geometrica, è ben conscio che è l'immagine di una macchina e che deve essere mentalmente messa in movimento, ma questo è proprio lo scoglio maggiore. Questa consapevolezza e l'esplorazione mentale che ha tentato di fare lo guidano comunque nella risoluzione dell'item 3, che in termini di processi messi in atto ha come referente il movimento (referente *dinamico*).

13.8. Riflessioni

La prova sul campo di questa domanda tipo-PISA ha messo in luce alcuni aspetti interessanti circa i modi di ragionare degli allievi: in particolare la difficoltà che essi incontrano ad immaginare una macchina in movimento. Le ipotesi di ricerca alla base della sperimentazione sono state confermate: l'uso del computer costituisce, in una domanda di questo tipo, un valore aggiunto in quanto l'animazione dell'immagine della macchina sopperisce alla mancata esplorazione fisica della macchina; gli studenti che avevano precedentemente studiato il pantografo sono in grado di re-investire questa loro conoscenza nella risoluzione di un problema simile a quelli direttamente esperiti (item 1 e 2). Tale conoscenza, tuttavia, non è sufficiente per risolvere il quesito relativo alla variazione del pantografo di Scheiner in un pantografo per la simmetria centrale (item 3). In questo caso alla mancata esplorazione virtuale non si sostituisce una esplorazione mentale dello strumento. Al contrario gli studenti che hanno potuto esplorare virtualmente la variazione al pantografo sono stati in grado di rispondere all'item 3 e di giustificare coerentemente la loro scelta. Anche le tipologie di argomentazione, definite nell'analisi a priori della prova, trovano conferma nelle risposte degli studenti: negli item 1 e 2 le giustificazioni sono prevalentemente di tipo *geometrico* o *funzionale*, mentre nell'item 3 la prevalenza delle giustificazioni è di tipo *dinamico*. A conferma di questi risultati possiamo considerare le risposte della classe e dello studente che non avevano mai avuto esperienze pregresse con il pantografo di Scheiner e utilizzavano la versione cartacea della prova.

Capitolo quattordicesimo
Conclusioni

Questa ricerca documenta e analizza lo svolgimento del progetto biennale (2008-2010*) Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna: Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna,* per l'Azione 1 (*MMLab-ER - Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia-Romagna*), il cui coordinamento scientifico è stato affidato al Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena (prof. Maria G. Bartolini Bussi, Dr. Michela Maschietto).

Il Progetto di ricerca MMLab-ER si è proposto fino dall'inizio di rispondere alle indicazioni e raccomandazioni nazionali e internazionali sull'idea di laboratorio di matematica, espandendo nella regione Emilia-Romagna il modello originale di laboratorio elaborato a Modena e riguardante le macchine matematiche. L'idea del Progetto nasce nel 2007 con i seguenti obiettivi:

- creazione di luoghi fisici istituzionali (aule didattiche decentrate) presso i Centri di documentazione educativa per dare, a livello locale, continuità nel tempo alle azioni avviate nel Progetto MMLab-ER;
- formazione degli insegnanti dei vari ordini scolastici sulle metodologie del laboratorio di matematica attraverso l'uso di macchine matematiche;
- sperimentazione di attività di laboratorio con le macchine matematiche nelle classi dei docenti formati;
- coinvolgimento del territorio (istituzioni locali, centri di documentazione educativa) nel sostegno e nell'amplificazione delle azioni proposte.

Un rapporto di sintesi rivolto agli attori istituzionali e agli operatori scolastici è già stato pubblicato (Martignone, 2010), mettendo in evidenza la struttura generale del progetto, le risorse umane e strumentali messe in campo, i risultati nelle singole province attraverso ampie selezioni di materiali di formazione e la documentazione di casi paradigmatici di sperimentazioni. Questa ricerca costituisce un'estensione di tale rapporto con l'inquadramento nella letteratura internazionale e l'analisi dettagliata di alcuni casi paradigmatici e di alcune implicazioni sul sistema educativo.

Essa rende conto del progetto MMLab-ER da due punti di vista.

1) Il punto di vista della Ricerca in Didattica della Matematica attraverso il quale il progetto è stato descritto e analizzato. Si sono quindi analizzate le componenti didattiche, cognitive ed epistemologiche del focus del progetto: *il laboratorio con la macchine matematiche.* L'analisi ha riguardato sia le scelte compiute nella formazione dei docenti del progetto sia le sperimentazioni nelle classi. Il progetto regionale rappresenta quindi un caso paradigmatico di progetto di formazione e sperimentazione sul laboratorio delle macchine matematiche. In particolare da questo punto di vista si sono approfonditi i seguenti aspetti:

   a) La *formazione degli insegnanti di matematica* nella letteratura (modelli di formazione dalla letteratura internazionale; rivisitazione del modello di Shulman, alla luce degli sviluppi più recenti; il modello di Ball & Bass; l'analisi culturale dei contenuti). La formazione degli insegnanti del progetto MMLab-ER: sviluppo di alcuni aspetti teorici relativi alla conoscenza dell'insegnante (*teacher knowledge*) e alle consegne per gli insegnanti in formazione (*tasks for teachers*).

   b) *Le sperimentazioni in classe* nel progetto regionale MMLab-ER (schema delle sperimentazioni; esempi nei diversi ordini di scuola).

   c) L'analisi di alcune sperimentazioni. Il laboratorio di matematica con la pascalina (macchina aritmetica): validazione del quadro di riferimento teorico della mediazione semiotica. Il laboratorio di matematica con i pantografi (macchine per la geometria): validazione del percorso esplorativo di una macchina matematica con lo scopo di sviluppare processi argomentativi. Una macchina matematica in un contesto tipo OCSE-PISA: validazione del percorso esplorativo virtuale (computer-based) di una macchina matematica.

2) Il punto di vista più legato ai risultati concreti del progetto e alle sue implicazioni didattiche. I risultati del progetto possono essere così sintetizzati:

   a) Sono state create quattro aule didattiche decentrate presso Centri di Documentazione delle province di Piacenza, Rimini, Ravenna (Lugo-Faenza) e Bologna, che, in aggiunta alle sede originaria di Modena, costituiscono poli di formazione ricoprenti il 60% della popolazione scolastica regionale.

   b) È stata costituita una rete di un centinaio di 'esperti' (ricercatori, formatori, tutor, insegnanti) preparati alla realizzazione di esperienze didattiche nel laboratorio di matematica.

c) Sono state attivate promozioni e diffusioni nelle province della regione non direttamente coinvolte nel progetto (con estensione anche a regioni limitrofe) sulla didattica nel laboratorio di matematica.

In particolare attraverso questo progetto sono state incoraggiate sostenute e promosse ulteriori iniziative, in tutta la regione Emilia-Romagna, che hanno coinvolto anche le province non direttamente toccate dal progetto.

Modena. Le macchine aritmetiche sono entrate in vari progetti di formazione in servizio. Il progetto di matematica delle insegnanti delle scuole comunali del comune di Modena è centrato sull'uso di un pallottoliere di grandi dimensioni, introdotto in tutte le scuole[70]. Alle scuole primarie e secondarie di primo grado è stato proposto dal Centro MEMO nel 2009-2010 un corso sul tema Laboratorio di Matematica: il caso della scuola cinese[71], con la costruzione e l'uso del suànpán (abaco cinese).

Piacenza. L'attività del CDE è stata arricchita dalla collaborazione stabile con Nicoletta Nolli (Liceo Scientifico Aselli di Cremona), vicina geograficamente alla sede di Piacenza. In collaborazione con il gruppo di Modena, N. Nolli ha curato la pubblicazione di un prodotto multimediale (DVD) sulla Mostra *Perspectiva Artificialis*, realizzata a Cremona nel 2008, contenente, oltre al catalogo, i laboratori didattici organizzati dagli studenti del Liceo Scientifico Aselli con i loro insegnanti. N. Nolli ha anche realizzato, in collaborazione con R. Garuti e F. Martignone, un approccio originale alle macchine matematiche nella scuola secondaria di primo grado in cui il ruolo di tutor esperti è stato svolto dagli studenti di una classe quarta del Liceo Aselli.

Ravenna. La sinergia tra il Centro Risorse Territoriali per la Formazione e l'Innovazione Didattica di Lugo e la Palestra della Scienza di Faenza ha promosso e dato valore alla realizzazione di varie iniziative nel laboratorio senza pareti di Matebilandia[72], alla realizzazione della Mostra La Bottega Matematica (realizzata con il supporto dell'Università di Modena e Reggio Emilia) e all'omonimo Concorso[73].

[70] *http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?idSezione = 1772*

[71] *http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?idSezione = 1783*

[72] *http://www.mirabilandia.it/pdf/prog_dida_13.pdf*

[73] *http://palestradellascienzafaenza.racine.ra.it/Eventi/2009/BottegaMatematica/Images/Concorso_LaBottegaMatematica.pdf*

Rimini. I corsisti hanno promosso nelle loro scuole la didattica laboratoriale con le macchine matematiche. Inoltre l'insegnante Carla Ferretti e i suoi studenti hanno partecipato, con il laboratorio sulle macchine matematiche, all'evento *Una scuola grande come la regione*, a settembre 2010. Sempre in questa scuola insegnante e studenti partecipano al Progetto Qualità e Merito del MIUR con il laboratorio delle macchine matematiche, utilizzando macchine che gli studenti hanno costruito con materiali di recupero.

Bologna. Il tutor S. Banchelli, del Liceo Scientifico "Visitandine-Malpighi" di Castel San Pietro Terme (BO), ha avviato una collaborazione stabile con l'Associazione Macchine Matematiche di Modena per la costruzione di percorsi didattici sul disegno prospettico e i prospettografi. Sempre a Bologna il centro "Minguzzi", referente per l'aula decentrata, sta organizzando (marzo-aprile 2011) un corso di formazione rivolto ai docenti della provincia che sarà tenuto dagli insegnanti formati nel progetto MMLab-ER.

Anche alcune delle province che non hanno, per motivi di finanziamento non sufficiente, partecipato al Progetto hanno promosso o ospitato eventi sul Laboratorio di Matematica.

Forlì-Cesena. Presso il Liceo Ferrari di Cesenatico, da vari anni, in occasione della finale nazionale delle Olimpiadi di matematica, si svolge una mostra, allestita per conto dell'Unione Matematica Italiana dall'Associazione Macchine Matematiche di Modena, con la visita di centinaia di studenti[74].

Parma. Il 22 maggio 2010 l'Assessore alle Politiche Scolastiche della Provincia di Parma ha organizzato un evento dal titolo *Un nuovo Milione: Insegnamento-apprendimento della Matematica tra Oriente e Occidente*[75]. Nel convegno, a cui hanno partecipato circa 300 insegnanti, sono stati restituiti i risultati del Progetto Regionale e alcuni risultati di un progetto di laboratorio interculturale.

Reggio Emilia. Nell'anno 2009-2010 la Facoltà di Scienze della Formazione di Reggio Emilia (Università di Modena e Reggio Emilia) ha avviato un progetto di tirocinio dal titolo *Artefatti fatti ad arte*, costituendo un gruppo misto di docenti universitari, di supervisori del tirocinio, di studenti tirocinanti di Scienze della Formazione Primaria e di tutor accoglienti delle scuole. Il progetto, centrato sulla metodologia del Laboratorio di Matematica, ha consentito l'avvio di una decina di tesi di laurea.

[74] *http://www.scuolaer.it/notizie/Eventi/olimpiadi_matematica_cesenatico.aspx*

[75] *http://www.scuolaer.it/notizie/Eventi/nuovo_milione.aspx*

Questo breve elenco testimonia l'interesse per il laboratorio con le macchine matematiche suscitato in gran parte della regione da questo Progetto, che ha operato come catalizzatore e promotore di iniziative coinvolgenti centinaia di insegnanti e migliaia di studenti delle scuole di ogni ordine e grado. In questo modo sono stati favoriti anche scambi, contatti e sinergie tra le diverse istituzioni, con l'obiettivo, appunto, di *fare sistema nella Regione Emilia-Romagna*[76].

[76] *http://www.scuolaer.it/notizie/regione_scuola/fare_sistema_regione_emilia_romagna.aspx*

Appendice

L'appendice contiene alcuni documenti relativi al progetto MMLA-ER:

- il protocollo di intesa fra le istituzioni coinvolte nel progetto (cap. 4);
- la griglia per la sperimentazione in classe predisposta per gli insegnanti del progetto (cap. 6);
- il diario di bordo delle sperimentazioni in classe (cap. 6);
- le schede per i ragazzi utilizzate nella sperimentazione pilota (cap. 11);
- la verifica finale sui pantografi (cap. 12)
- il quesito simil-PISA utilizzato nell'indagine del cap. 13

Assessorato alla Scuola. Formazione Professionale,
Università, Lavoro e Pari Opportunità

Intesa tra l'Assessorato regionale alla Scuola Formazione Professionale Università Lavoro e Pari Opportunità, la Direzione Generale dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna e l'Agenzia Nazionale per lo sviluppo dell'Autonomia Scolastica (Nucleo Regionale Ex IRRE ER) per la realizzazione di un progetto regionale di promozione delle competenze scientifiche e matematiche, denominato "Progetto Scienze e Tecnologie", nel quadro del progetto nazionale per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica.

Visto il D.M. 4 agosto 2006, con il quale si è istituito un Gr uppo di lavoro interministeriale per lo sviluppo della Cultura Scientifica e Tecnologica, di seguito denominato "Gruppo di lavoro", con i seguenti compiti:

– definire le azioni e le strutture per la diffusione della cultura scientifica e tecnologica nel Paese;
– suggerire le linee di una politica di sviluppo che definisca i compiti dei soggetti pubblici e privati;
– proporre e definire progetti e azioni di sistema rivolti alla scuola, ai cittadini adulti, alla società nel suo complesso;
– proporre, in particolare, azioni e servizi per la formazione dei docenti e per il sostegno alla loro attività professionale;
– suggerire soluzioni curricolari in vista di un miglioramento degli ordinamenti formativi.

Considerato il Documento di lavoro 2007 per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica, prodotto dal citato Gruppo di lavoro interministeriale, nel quale si formulano raccomandazioni e si avanzano indicazioni, tra le quali:

– promuovere un programma per lo sviluppo professionale dei docenti;
– promuovere un programma pluriennale per lo sviluppo delle scuole come laboratori del sapere scientifico, dotandole dei mezzi necessari;
– dare il rilievo necessario, nella ridefinizione dei curriculi alle discipline scientifiche e tecnologiche ed alla loro dimensione culturale e sperimentale;

– ripensare e riprogettare i percorsi formativi universitari alla luce delle criticità emerse con la crisi delle immatricolazioni ai corsi di laurea delle scienze di base e tenendo conto dello spazio europeo dell'istruzione superiore;

– estendere e rendere sistematiche le azioni di orientamento formativo sviluppando i modelli emersi con il Progetto Lauree Scientifiche;

– ridefinire la formazione iniziale dei docenti;

– favorire la creazione di istituzioni culturali di livello adeguato, capaci di operare in modo incisivo almeno in ambito regionale e sub regionale;

– dedicare cura alla professionalità degli addetti e alla loro consapevolezza sugli atteggiamenti della comunicazione:

– impegnare le istituzioni e le organizzazioni culturali in un ruolo di sistema a supporto della formazione scolastica;

– creare strumenti e pratiche permanenti di trasparente conoscenza reciproca tra il mondo della formazione e quello delle imprese;

Tenuto conto delle Indicazioni per il curricolo del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca;

Visto il Decreto del Direttore Generale n. 643 del 14 dicembre 2007, con il quale si istituisce presso l'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna il Comitato Regionale con compiti di indirizzo e supporto tecnico per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica;

Condivisa l'opportunità di valorizzare e diffondere a favore dell'intero sistema scolastico le iniziative poste in essere dalle istituzioni scolastiche della regione;

Tenuto conto della volontà dell'Assessore alla Scuola, Formazione Professionale, Università, Lavoro, Pari Opportunità della Regione Emilia-Romagna di rendere la Regione parte attiva per programmare iniziative e progetti che favoriscano e sostengano lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nei giovani;

Tenuto conto altresì che a tal fine verranno destinate risorse finanziarie ed umane per una prima attuazione sul territorio regionale di obiettivi di breve e medio periodo, specificati nelle Linee guida, allegate e parte integrante della presente Intesa;

Visti i risultati della ricerca OSCE-PISA 2006 in Emilia-Romagna e condivisa l'opportunità di attivare primi interventi nell'ambito della competenza matematica, avvalendosi della proposta progettuale elaborata dal dipartimento di Matematica pura ed applicata dell'Università di Modena e Reggio Emilia per la realizzazione di laboratori di macchine matematiche diffusi sul territorio regionale, al servizio delle istituzioni scolastiche, che corrisponde adeguatamente alle finalità del progetto regionale;

Le parti convengono di:

1. avviare congiuntamente un Progetto di promozione delle competenze scientifiche e matematiche (nel seguito denominato per brevità Progetto Scienze e Tecnologie), costituito dalle Linee guida (Allegato 1), dall'Azione 1 – Laboratorio delle macchine matematiche (Allegato 2), dall'Azione 2 – Rete delle strutture espositive scientifiche (Allegato 3), parti integranti della presente intesa;
2. definire quali enti promotori del Progetto l'Assessorato alla Scuola della Regione Emilia-Romagna, l'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia-Romagna, l'Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica (Nucleo Regionale Ex IRRE ER);
3. costituire un Comitato di indirizzo di cui siano componenti i responsabili del Progetto medesimo, in partenariato: la dott.ssa Paola Manzini, Assessore alla Scuola, Formazione Professionale, Università, Lavoro e Pari Opportunità della Regione Emilia-Romagna, il dott. Luigi Catalano, Direttore Generale dell'USR ER, la dott.ssa Leopolda Boschetti, Commissario Straordinario dell'Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica;
4. costituire, per l'attuazione del Progetto, un Comitato tecnico scientifico di cui fanno parte rappresentanti della Regione Emilia-Romagna, dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna, dell' ANSAS - ex IRRE;
5. integrare di volta in volta il Comitato tecnico scientifico di cui al punto 4 con i rappresentanti delle istituzioni partecipanti alle azioni di cui in allegato; nello specifico: per l'Azione 1, i rappresentanti dell'Università di Modena e Reggio Emilia (prof.ssa Maria G. Bartolini Bussi, prof.ssa Michela Maschietto e dott.ssa Rossella Garuti); per l'Azione 2, rappresentanti dell'Istituto regionale Beni Artistici Culturali e Naturali (IBACN);
6. prevedere un *Gruppo di consultazione* paritetico e collegiale, con finalità anche scientifiche e nella accezione regionale di assistenza tecnica, a garanzia della pluralità delle competenze in ambito scientifico e tecnologico espresse dal territorio, per seguire l'andamento complessivo delle diverse azioni previste al fine di rilevarne e valorizzarne gli obiettivi, facilitarne la messa in rete e consentire il dialogo tra le differenti istituzioni coinvolte, costituito da:
   - i componenti del Comitato regionale, di cui in premessa, in rappresentanza delle Istituzioni scolastiche, scientifiche e culturali;
   - rappresentanti dei centri di documentazione del territorio della Region Emilia-Romagna;
7. affidare il coordinamento scientifico del Progetto:

quanto all'azione 1, alla prof.ssa Maria G. Bartolini Bussi;

quanto all'azione 2, a rappresentante IBACN;

8. destinare per la realizzazione delle azioni relative all'anno 2008/2009 le seguenti risorse finanziarie:

– € 100.000,00 erogati dalla Regione Emilia Romagna,

– € 20.000,00 erogati dall'USR ER a favore delle istituzioni scolastiche regionali coinvolte nel Progetto

Tali risorse potranno essere successivamente integrate da ulteriori risorse finanziarie, la cui destinazione sarà congiuntamente definita e condivisa dal Comitato di indirizzo;

9. indicare in 24 mesi a partire dalla data della presente Intesa, il periodo di attuazione del Progetto Scienze, che dovrà essere oggetto di un report di monitoraggio annuale per la verifica del raggiungimento degli obiettivi fissati;

10. stabilire che nessun compenso o gettone è dovuto ai componenti del Comitato di indirizzo, del Comitato tecnico scientifico e del Gruppo di consultazione, escluso il rimborso delle eventuali spese di viaggio, se spettanti.

Bologna,

L'Assessore alla Scuola,Formazione Professionale, Università, Lavoro, Pari Opportunità dell'Emilia-Romagna *Dott.ssa Paola Manzini*

Il Direttore Generale dell'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia-Romagna *Dott. Luigi Catalano*

Il Commissario Straordinario dell'Agenzia Nazionale per lo sviluppo dell'Autonomia Scolastica *Dott.ssa Leopolda Boschetti*

GRIGLIA SPERIMENTAZIONE

Obiettivo/i della sperimentazione (sotto-obiettivi)
Livello scolastico
Durata (minimo 6 ore)
Contenuti matematici
Analisi didattica (o analisi a priori) • Pre-requisiti degli studenti • *Quali sono le caratteristiche e le peculiarità dello strumento che vogliono essere sfruttate per raggiungere un certo obiettivo pedagogico* • Possibili difficoltà/ problemi
Breve descrizione dell'attività (elenco delle attività programmate con relativi obiettivi specifici)
Documentazione (Fotografie delle attività e/o sbobinature delle discussioni collettive. Schede individuali e di gruppo. Testi prodotti dagli alunni)

SCHEMA DI DIARIO DI BORDO

Titolo attività di Laboratorio PERCORSO	
Docente	

classe	scuola

Strumenti	

Contenuto matematico	

Data inizio esperienza	Data fine esperienza

DESCRIZIONE ESPERIENZA **Descrivere dal punto di vista operativo l'esperienza svolta in classe (il contesto della classe, i tempi di realizzazione, …) e la metodologia usata (schede di lavoro, lavoro di gruppo, discussione matematica in classe,…)**
Esplorazione della macchina: come è fatta la macchina? *Descrivere le esplorazioni degli studenti sulla macchina*

Produzione di congetture: cosa fa la macchina? *Descrivere le ipotesi prodotte dagli allievi sul funzionamento e sulla produzione della macchina*

Giustificazione e dimostrazione: perché lo fa? *Descrivere le argomentazioni prodotte dagli studenti*

Eventuali consegne somministrate agli allievi

APPRENDIMENTO: SUCCESSI E DIFFICOLTA' *Rilevare i risultati positivi o le difficoltà incontrate dagli studenti nella comprensione dei vari concetti matematici*	
risultati positivi	**commenti**
difficoltà	**commenti**

TESTO FINALE COLLETTIVO E CONDIVISO *Riportare il testo finale prodotto collettivamente alla fine delle attività di laboratorio*

VALUTAZIONE *Sono state somministrate delle prove di verifica? Se sì, riportare e commentare le prove di verifica proposte e i relativi risultati.*

RUOLO DELLO STRUMENTO *Descrivere in che modo lo strumento è stato utile per l'attività svolta*

RUOLO DELL'INSEGNANTE *Descrivere se e in che modo il ruolo dell'insegnante in una attività di questo tipo cambia rispetto alle attività standard*

SCHEDE PER LA SPERIMENTAZIONE PILOTA SULLA PASCALINA

Classe______________Alunno________________________________

SCHEDA 1

ALLA SCOPERTA DELLA PASCALINA: come è fatta la macchina?

L'immagine è la macchina ZERO +1 prodotta dalla Ditta Quercetti. E' la ricostruzione di una macchina storica costruita da Blaise Pascal, un grande matematico, per aiutare il padre che faceva il contabile per il Cancelliere della Normandia (1645).

Disegna la Pascalina sul retro del foglio e rispondi alle domande SENZA UTILIZZARE LA MACCHINA:

1. Quante ruote ha la macchina?

____

2. Come sono queste ruote? Sono tutte uguali? Sono diverse? Descrivi con cura

____

3. Come sono collegate le ruote fra di loro?

____

4. Secondo te a che cosa serve la Pascalina?

____

Classe_______________Alunno___________________________________

SCHEDA 2

ALLA SCOPERTA DELLA PASCALINA: come è fatta la macchina?

Ritagli delle ruote dentate in modo da ricostruire la Pascalina. Disponi le ruote su un foglio come quelle della Pascalina e fissale con ferma campioni in modo che possano ruotare. Scrivi le cifre sui denti delle ruote e disegna frecce per indicare i versi di rotazione.

Rispondi alle seguenti domande METTENDO IN MOVIMENTO LA MACCHINA

1. In che modo si possono muovere le ruote dentate gialle?

2. In che modo si possono muovere le ruote dentate arancioni?

3. Muovendo la ruota gialla in basso a destra cosa succede? Spiega bene tutto quello che avviene.

4. Secondo te a che cosa servono le ruote arancioni?

Classe_______________Alunno___________________________________

SCHEDA 3

ALLA SCOPERTA DELLA PASCALINA: come funziona la macchina?

1. Posiziona la Pascalina a 0 0 0 e poi costruisci il numero 125; poi aggiungi 1 spingendo la prima ruota gialla a destra in basso. Spiega a parole e con disegni che cosa osservi

2. Posiziona la Pascalina a 0 0 0 e poi costruisci il numero 229; poi aggiungi 1 spingendo la prima ruota gialla a destra in basso. Spiega a parole e con disegni che cosa osservi

3. Posiziona la Pascalina a 0 0 0 e poi costruisci il numero 299; poi aggiungi 1 spingendo la prima ruota gialla a destra in basso. Spiega a parole e con disegni che cosa osservi

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 4

ALLA SCOPERTA DELLA PASCALINA: come funziona la macchina?

1. Posiziona la Pascalina a 0 0 0 e poi costruisci il numero 399. Spiega a parole e con i disegni come hai fatto

2. Trova un modo per costruire il numero 399 con il minor numero di movimenti possibile. Spiega a parole e con un disegno come hai fatto.

3. Costruisci il numero 499 con un solo movimento partendo dal numero che preferisci Spiega come hai fatto.

4. Qual è il numero massimo che la Pascalina può rappresentare? Perché?

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 5

ALLA SCOPERTA DELLA PASCALINA: come funziona la macchina?

1. Posiziona la Pascalina a 23 e cerca di arrivare a 44. Spiega come fai e cosa fa la macchina.

____

____

2. Posiziona la Pascalina a 23 e cerca di arrivare a 20. Spiega come fai e cosa fa la macchina

____

3 Posiziona la Pascalina a 23 e cerca di arrivare a 17 . Spiega come fai e cosa fa la macchina.

____

4 Posiziona la Pascalina a 235 e cerca di arrivare a 244 con il minor numero di movimenti possibile. Spiega come fai e cosa fa la macchina

____

5 Posiziona la Pascalina a 235 e cerca di arrivare a 224 con il minor numero di movimenti possibile. Spiega come fai e cosa fa la macchina

____

6 Scrivi le regole di funzionamento che hai scoperto sulla Pascalina

____

Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 6

ALLA SCOPERTA DELLA PASCALINA: Un pò di storia

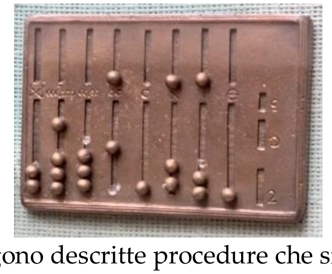
1. L'abaco: uno strumento antico per far di conto

L'abaco dal latino *abacus* è uno strumento conosciuto e utilizzato da molti popoli antichi (Ifrah, 1983). Lo strumento rappresenta una evoluzione delle tecniche di conteggio fondate su una semplice corrispondenza uno a uno poiché consente di velocizzare la conta e i calcoli contemplando sempre l'idea di raggruppamento che è fondamentale per l'eventuale successivo emergere di un sistema di notazione numerica di tipo posizionale. Le testimonianze storiche illustrano diverse tipologie di abaco, ad esempio greci, latini, arabi, persiani e forse anche indiani utilizzavano l'abaco a polvere in cui si inseriscono gettoni o piccoli sassi in scanalature scavate nella sabbia. Oggi chiamiamo abaco lo strumento che deriva dall'abaco romano che è costruito permettendo a "pedine" di muoversi entro scanalature o di scorrere lungo fili o sottili aste.

Il termine abaco Il termine deriva dal latino *abacus* (proveniente dal greco *abaks* o *abakion,* ripiano, tavola o forse dalla parola semitica *Abq,* ,sabbia, polvere). In latino il termine per indicare i sassolini utilizzati era *calculi* da cui la parola italiana calcoli che significa sia far di conto, ma nache è utilizzata per indicare una patologia "*i calcoli al rene*". In questo caso il termine mantiene il suo significato originario di sassolino.

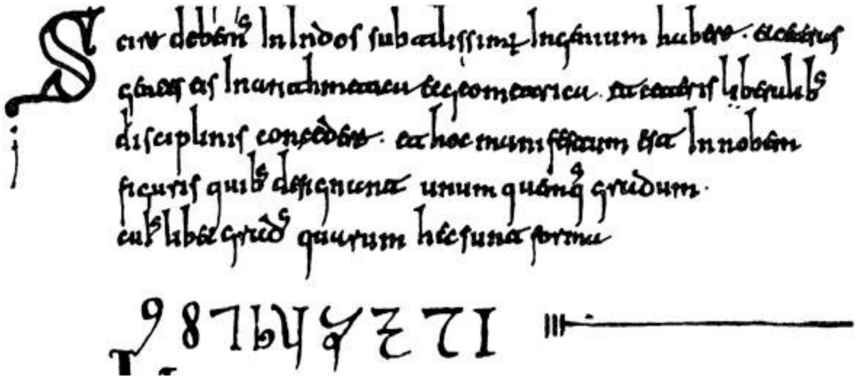
Il funzionamento si basa sul principio fondamentale di ogni sistema di numerazione posizionale, cioè che il valore di una cifra dipende dal posto che occupa.

L'abaco cessò di essere impiegato in Europa solo tra la fine del XVII secolo e l'inizio del XVIII nonostante già nel 1202 fosse stato pubblicato il *Liber Abaci* di Leonardo Pisano (detto "Fibonacci") che spiega come possano essere eseguiti agevol-mente i calcoli con carta e penna.



Nel testo di Fibonacci vengono descritte procedure che si avvalgono delle dieci cifre arabe che avevano iniziato diffondersi dal X al XI secolo grazie a traduzioni in latino di opere scritte in arabo. Non poche resistenze accompagnarono questa novità soprattutto per quanto riguarda lo zero come testimonia, ad esempio, la sua assenza nel più antico documento storico europeo in cui compaiono le cifre arabe: il *Codex Vigilanus* dell' 876 d.C.

La disputa fra algoristi (coloro che usavano carta e penna per fare calcoli conoscendo le tecniche di calcolo scritto) e gli abacisti (coloro che insistevano ad usare l'abaco) durò molti secoli. Il trionfo degli algoristi sugli abacisti, è eloquentemente rappresentato in una xilografia della *Margarita philosiphica* di Gregor Reisch (1503). L'immagine mostra Boezio, ritenuto all'epoca l'inventore dei numerali, che punta verso lo "0" eseguendo un calcolo assai più complesso di Pitagora che seduto alla sua sinistra è intento a spostare gettoni su una tavola di calcolo.



2. Prime calcolatrici meccaniche
   Nel 1500 Leonardo da Vinci, nel Codice di Madrid, rappresenta una macchina che viene considerata un possibile progetto di calcolatrice meccanica.
3. La nascita della Pascalina
   Blaise Pascal (1623-1662), nel corso di diversi anni, realizza un progetto analogo e invia un prototipo di macchina calcolatrice[77] di tipo meccanico al cancelliere Séguier, con relative istruzioni d'uso e accompagnato da una lettera in cui scrive:
   …le lungaggini e le difficoltà degli strumenti di cui ci serviamo normalmente per i calcoli, mi hanno indotto a pensare a un aiuto più veloce e più semplice, anche per le mie esigenze personali, al fine di alleggerirmi nei grandi calcoli in cui sono occupato da qualche anno … (Pascal, 1645)

[77] Una versione di questa macchina è conservata al Musée des Art set Métier di Parigi

Gli strumenti a cui Pascal si riferisce sono gli abaci e, in effetti, il grande vantaggio che il suo strumento (che verrà definito "Pascalina") offre è quello di automatizzare i cambi grazie ad un sistema meccanico ad ingranaggi del tutto analogo a quello già da tempo utilizzato per la realizzazione degli orologi.
Pascal ha il merito di aver intuito la possibilità di modificare i rapporti numerici fra il numero dei denti di ruote fra loro ingranate anche per realizzare macchine calcolatrici oltre che orologi.

4. L'abaco nel mondo

   E' interessante notare come l'abco era fino a poco tempo fa diffuso in tutto il mondo. Ecco alcuni esempi di abaco russo (*s'choty),* abaco giapponese (*soroban)e* abaco cinese *(suan-pan)*

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 7
LE OPERAZIONI. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

1 Fai l'addizione con la pascalina **273+68=**________________ Spiega quello che fai.

____

2 Come puoi fare, utilizzando la macchina ad essere sicuro che il risultato sia giusto? Spiega quello che fai.

____

3 Fai l'addizione con la pascalina **464+ 56=**__________ Spiega quello che fai . Osservi qualcosa di diverso rispetto alla operazione precedente? Cosa?

____

4 Fai la sottrazione 238- 73=_____________ spiega come fai ____Come puoi fare, utilizzando la macchina ad essere sicuro che il risultato sia giusto? Spiega quello che fai

____

5 Fai le seguenti operazioni con la Pascalina: 324+32=

a) 729+11=

b) 324+_____= 356 287+ 12= 12+ 200+80+7=

c) _____+73=324 432-29=____________ 349 - _____=299

d) ____- 37= 244 189-128= 189-100-80-8=

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 8

LE OPERAZIONI. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

1. Inventa tu almeno 6 operazioni da fare con la pascalina per i ragazzi di quinta elementare come compito per le vacanze. Spiega perché hai scelto queste operazioni.

Operazione	Motivo
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Classe______________Alunno___________________________________

SCHEDA 8 bis

LE SCOPERTE DELLA I B di LIZZANO

Scuola media CHIONNA

1. CONGETTURA INGRANAGGI PASCALINA
   « **Qualsiasi** numero che finisce per 0 0 se fai un click in senso antiorario, girano tutte e cinque le ruote»
   «Tutti i numeri che finiscono per 9 9 se fai un click in senso orario, girano tutte le ruote».
2. DIMOSTRAZIONE
   Con la Pascalina possiamo provare tutti i numeri e verificare se la nostra congettura è vera.

- 000 ;100,200,300,400, 500, 600, 700,800,900 sono tutti i casi possibili
- 099, 199, 299, 399,399, 499, 599, 699, 799,899,999 sono tutti i casi possibili

3. GENERALIZZAZIONE
   E se le ruote fossero n? Come deve essere cambiata la congettura?
   «Qualsiasi numero che ha tutte le cifre 0 eccetto la prima, se fai un click in senso antiorario gira tutto l'ingranaggio»
   Esempio 5000000 click in su= 6000000
   «Tutti i numeri che hanno tutte le cifre 9 eccetto la prima, se fai un click in senso orario gira tutto l'ingranaggio »
   Esempio 5999999 click in giu=6000000

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE: ISTRUZIONI PER L'USO

4. **METODO +1 O -1**
   Se vuoi fare una addizione con la Pascalina basta che fai +1(girando la ruota delle unità in senso orario) tante volte quanto vale il numero che vuoi aggiungere.
   Se vuoi fare una sottrazione con la Pascalina basta che fai -1(girando la ruota delle unità in senso anti-orario) tante volte quanto vale il numero che vuoi sottrarre
5. **METODO DECOMPOSIZIONE**
   Se vuoi fare una addizione con la Pascalina puoi aggiungere, girando le ruote in senso orario, le ruote delle centinaia,delle decine e delle unità tante volte quante volte sono espresse dalla decomposizione del numero in centinaia, decine e unità
   Se vuoi fare una sottrazione con la Pascalina puoi togliere, girando le ruote in senso orario, le ruote delle centinaia,delle decine e delle unità tante volte quante volte sono espresse dalla decomposizione del numero in centinaia, decine e unità
6. **METODO DEL COMPLEMENTO**
   Se vuoi fare l'addizione con la Pascalina puoi trovare il complemento a un numero di ordine superiore vicino e aggiungere o sottrarre in modo conveniente.
   ESEMPIO: 127+18=145 e 127-18=109
   Metodo 1: 127+18 unità=145
   127-18 unità=109
   Metodo 2:
   127+1 decina+8 unità=145 oppure 127+8 unità + 1 decina= 127
   127 -1 decina- 8 unità=109 oppure 127-8 unità -1 decina
   Metodo 3
   127 +2 decine – 2 unità=145
   127-2 decine + 2 unità

Con la Pascalina si capisce bene che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione

Classe_______________ Alunno____

SCHEDA 9

LE OPERAZIONI. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

SCRIVI LE ESPRESSIONI MATEMATICHE CHE RAPPRESENTANO I TRE DIVERSI PROCEDIMENTI DELL'OPERAZIONE SOTTO RIPORTATA:

28+14

CRISTIAN
Ho scritto il primo addendo, 28, poi ho aggiunto il secondo, ruotando in senso orario la rotella delle unità quattro volte e la rotella delle decine una sola volta. Il risultato è 42.
ORONZO
Ho scritto il numero 28 poi ho girato in senso orario 14 volte la ruota in basso a destra, quella delle unità. Il risultato è 42
ELENA
Ho scritto il secondo addendo 14, poi ho ruotato in senso orario la rotella delle decine per 3 volte e la rotella delle unità 2 volte in senso antiorario

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 10

LE OPERAZIONI. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

127+36=163

4. **PAOLO:**

   127+(10+10+10)+(1+1+1+1+1+1)=127+30+6=163

5. **ELISA:**

   127+10+10+10+10-1-1-1-1= 127+(40-4)=163

6. **GIOVANNI:**

   **127+(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
   +1+1+1+1+1)=163**

Queste sono le espressioni aritmetiche che rappresentano i diversi procedimenti utilizzati dai tre ragazzi per fare l'addizione 127+36 sulla pascalina.

Spiega in ognuno dei tre casi i passi che fai sulla macchina e quello che fa la macchina.

____

____

2. Come ha fatto Antonio Chionna a risolvere questa operazione con la Pascalina?

_______- 98= 238

238+100-2=246

Scrivi i movimenti che faresti con la Pascalina

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 11

UN PROBLEMA CURIOSO

1. Fai la seguente sottrazione girando le ruote SOLO IN SENSO ORARIO

8-3=?

Spiega con cura come fai.

Sappiamo che deve venire 5, ma come si fa a fare questa operazione sulla Pascalina GIRANDO LE RUOTE SOLO IN SENSO ORARIO?

____

____

____

____

2. Prova il tuo metodo anche con le seguenti operazioni. Scrivi le tue osservazioni

   9-2= 7 19-10=9 193-50=

3. Secondo te come è possibile ottenere una sottrazione girando le ruote SOLO IN SENSO ORARIO? E' sempre possibile? Quando? Perché?

   ____

   ____

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 12

UNA STRANA CONGETTURA

Antonia, una ragazza di terza media ha prodotto la seguente congettura sulla sottrazione con la Pascalina:

Fantastico! Usando la Pascalina la sottrazione gode della proprietà commutativa! Infatti se faccio *-6+8 risulta 2* *Giro la ruota in basso a destra in senso antiorario 6 volte e poi la ruota in senso orario 8 volte* *Quindi con la Pascalina 8-6=-6+8 cioè vale la proprietà commutativa!*

Prova a controllare se la congettura di Daniela è vera cioè valida per tutti i numeri naturali. Scrivi le prove che fai e perché

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 12A
PRODUZIONI DI IPOTESI

1. Posiziona la macchina su 9,9,9 e poi immagina di aggiungere 1 . NON USARE LA MACCHINA. Secondo te cosa ottieni? Perché?

   999+1=

   ____

   ____

   _______________________________________Posiziona la macchina su 0,0,0, e poi immagina di togliere 1. NON USARE LAMACCHINA. Secondo te cosa ottieni perché?

   000-1=

   ____

   ____

   ____

   ____

2. Verifica ora sulla macchina le ipotesi da te prodotte. Le tue ipotesi sono corrette? Perché?

   ____

   ____

   ____

3 Posiziona la macchina su 0,0,0 e poi fai -8+2, cioè gira in senso antiorario la ruota in basso a destra per 8 volte e poi in senso orario 2 volte. Ottieni 994. Secondo te perché succede questo?

-8+2=994

____

____

____

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 13

PRODUZIONI DI IPOTESI

1 Posiziona la macchina su 9,9,9 e poi immagina di aggiungere 1 . NON USARE LA MACCHINA. Secondo te cosa ottieni? Perché?

999+1=

____

____

____

2 Posiziona la macchina su 0,0,0, e poi immagina di togliere 1. NON USARE LAMACCHINA. Secondo te cosa ottieni perché?

000-1=

____

____

____

3 Verifica ora sulla macchina le ipotesi da te prodotte. Le tue ipotesi sono corrette? Perché?

____

____

____

____

4 Posiziona la macchina su 0,0,0 e poi fai -8+2, cioè gira in senso antiorario la ruota in basso a destra per 8 volte e poi in senso orario 2 volte. Ottieni 994. Secondo te perché succede questo?

-8+2=994

Classe______________Alunno__________________________________

SCHEDA 14

LA MOLTIPLICAZIONE

1. Come possiamo fare la MOLTIPLICAZIONE con la pascalina?. Prova a trovare un metodo per fare

   12x3=36

   Spiega come fai. Secondo te perché funziona?

   ____

   ____

   ____

   ____

2. Proprietà della moltiplicazione con la Pascalina

   - Come fare 12X1= 12 con la Pascalina? Perché?

   - Prova a fare 12x12 =144 moltiplicando prima le decine e poi le unità. Funziona?

   - Confronta il metodo della Pascalina con l'algoritmo scritto che hai imparato alla scuola elementare. Cosa puoi dire? I due metodi sono uguali? Perché?

     ____

     ____

     ____

     ____

3. Tu sai che in una espressione si DEVONO fare PRIMA le moltiplicazioni e POI le addizioni e sottrazioni. E' la stessa cosa anche con la Pascalina? Perché?

Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 15

LA DIVISIONE

1 Come possiamo fare la DIVISIONE con la pascalina?. Prova a trovare un metodo per fare

12:3=4
12:5=2
Spiega come fai.. Che cosa rappresenta il numero che rimane scritto sulla Pascalina?

____

2 Proprietà della divisione con la Pascalina

- Come fare 12:1= 12 con la Pascalina? Perché?

- Prova a fare 12:12 =1 Come fai?

3 Proviamo a scrivere insieme il metodo:

____

- Il divisore ci dice

  ____

- quello che rimane sulla Pascalina rappresenta ____

- La divisione con la Pascalina ci fa notare la vera natura della divisione

Classe______________ Alunno_____________________________________

SCHEDA 16

LA DIVISIONE divisori e altro

24 è divisibile per 9?

Sappiamo che un numero per essere divisore di un altro deve dividerlo un numero esatto di volte, cioè non deve esserci resto. Possiamo usare la Pascalina per verificare questa proprietà? COME?

____

____

1. Prova tu

- 32 è DIVISIBILE per 6? Da cosa lo vedi con la Pascalina?

  ____

- 44 è DIVSIBILE per 11? Da cosa lo vedi con la Pascalina?

  ____

- 108 è DIVISIBILE per 9 Da cosa lo vedi con la Pascalina?

  ____

2. Osserva la seguente scrittura

12/5= 2+2/5

Come puoi interpretarla con la Pascalina?

Prova a fare 44:12 con la PAscalina e con il metodo che hai imparato alla scuola elementare. Che differenze noti? Spiega con cura.

Classe______________ Alunno______________________________________

SCHEDA 17

La lettera di ___________________

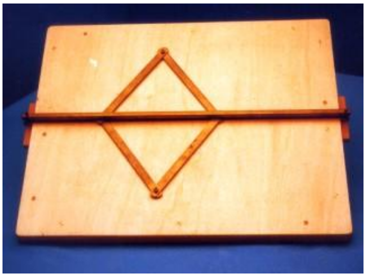
Immagina di essere Pascal e vuoi mandare una lettera al Granduca del tuo paese per raccontare della tua grande invenzione: una macchina per calcolare! Cerca di spiegare bene come deve essere utilizzare la macchina per fare le operazioni di addizione e sottrazione e quali sono i vantaggi e i limiti della tua invenzione. Puoi fare disegni ed esempi.

SCHEDE PER LA SPERIMENTAZIONE PILOTA SUI PANTOGRAFI

Classe______________ Alunno_____________________________________

SCHEDA 1

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO 1: come è fatta la macchina?



L'immagine riproduce un PANTOGRAFO cioè una macchina matematica che attraverso un sistema articolato obbliga un punto, un segmento o una figura a muoversi nel piano o a subire una trasformazione seguendo una legge matematica

1. Prova a muovere il sistema mettendo le mani sui vertici del sistema articolato. Chiudendo gli occhi muovi , cerca di capire come si muove una mano sulla macchina quando muovi l'altra mano. Secondo te cosa succede?

2 Descrivi la macchina: da quante aste è formato il sistema articolato? Quale figura geometrica formano tali aste' ci sono altri elementi importanti nella macchina?

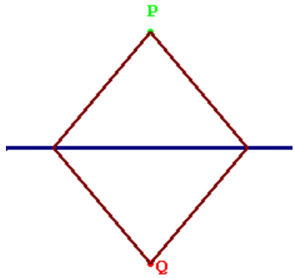
3 Nella macchina ci sono dei vertici liberi di muoversi nel piano mentre altri vertici sono obbligati a muoversi in un certo modo. Quali sono i vertici liberi e quelli "imprigionati"? In che modo possono muoversi i vertici "imprigionati? Perché?

4 Disegna ora la macchina in modo dettagliato sul retro del foglio e attribuisci delle lettere ai vertici del sistema articolato

Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 2

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO 1: come è fatta la macchina?

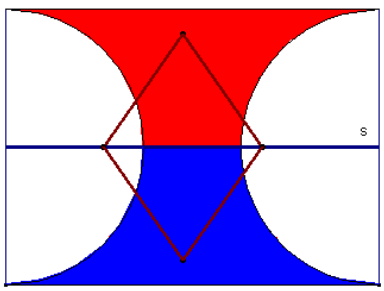


1 I due vertici liberi in cui sono presenti dei fori per inserire delle mine scriventi sono chiamati uno "puntatore" e l'altro "tracciatore". Nel disegno della macchina, il puntatore è .... e il tracciatore è ....

2 Prova a muovere la macchina e cerca di stabilire in quali parti del piano può disegnare e in quali non riesce a disegnare. Disegna la parte del piano in cui la macchina non può arrivare..

3 Spiega il tuo disegno? Perché la macchina non disegna in quella zona?

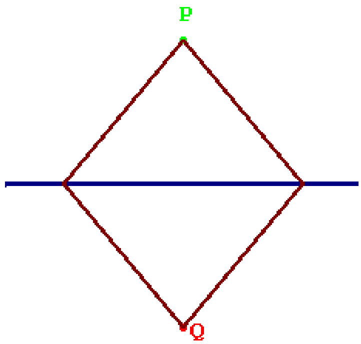
4 Osserva il disegno sottostante cosa significa secondo te?



Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 3

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO 1: cosa fa la macchina?



1. Metti dei fogli bianchi sulla macchina e fissali con il nastro adesivo. di carta. Disegna (usando riga, squadra e compasso) le figure indicate nella tabella nella parte di piano in cui si trova il puntatore. Metti ora la mina nel tracciatore e ricalca con il puntatore la figura disegna. Completa la tabella.

Se il puntatore descrive	*il tracciatore disegna*
un segmento di lunghezza..............	
un segmento perpendicolare alla scanalatura	
un segmento parallelo alla scanalatura	
un triangolo rettangolo	
un quadrato	
un cerchio	

2. Come trasforma la macchina le figure disegnate? Scrivi tutte le tue osservazioni.

Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 4

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO 1: cosa fa la macchina?

LETTERE E NUMERI

1. Metti dei fogli bianchi sulla macchina e fissali con il nastro adesivo. Disegna su uno dei fogli con gli stencil di metallo l'iniziale del tuo nome e poi dopo aver inserito la mina nel tracciatore ricalca le lettera con il puntatore. Vedi cosa succede con la macchina. Riporta qua sotto il disegno di quello che succede alla tua lettera.

2. Metti dei fogli bianchi sulla macchina e fissali con il nastro adesivo. Disegna con gli stencil di metallo un numero a piacere e poi come prima vedi cosa succede con la macchina. Riporta qua sotto il disegno di quello che succede al tuo numero.

3. Scrivi le tue osservazioni. Cosa fa la macchina secondo te?

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 5

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO 1: cosa fa la macchina?

Un disegno personale

1. Fai un disegno a piacere e personale, poi trasformalo con il pantografo1

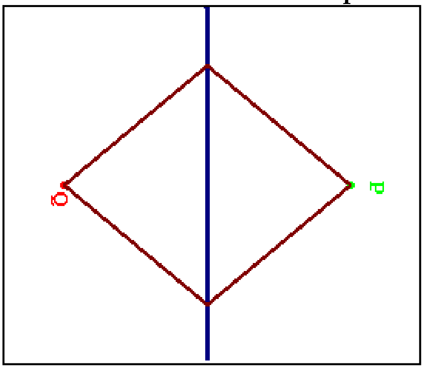
2. Sistema uno specchio in modo tale da riprodurre la trasformazione. Come lo devi disporre? Spiega bene

3. IN CONCLUSIONE: La macchina trasforma una figura ____

Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 6

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO 1: perché lo fa?



1 Quale figura geometrica riconosci nel sistema articolato? Quali sono le sue caratteristiche?

LATI	
DIAGONALI	

2 La guida nella quale scorrono i vertici "imprigionati" con quale elemento della figura coincide?

____

3 Secondo te perché la macchina fa questa trasformazione che abbiamo chiamato SIMMETRIA ASSIALE? Quali sono le sue caratteristiche?

____

____

4 Disegna la figura simmetrica a quella data rispetto all'asse di simmetria r secondo le regole stabilite al punto precedente

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 7
UN ESPERIMENTO CON LE CANNUCCE E IL FILO

Materiale*:* cannucce da bibita, filo elastico, forbici, ago

Istruzioni: prendi 4 pezzi di cannucce uguali fra loro, infila con l'ago il filo elastico dentro le cannucce e fissalo. Fissa anche le diagonali del rombo con il filo rosso. Osserva che come tutti i quadrilateri il rombo non è rigido.

1. Disegna alcuni rombi che puoi ottenere con una leggera pressione sul sistema. Quali elementi del rombo cambiano? Quali elementi del rombo non cambiano?

VARIANTI	
INVARIANTI	

____

____

____

2. E' possibile modificare la struttura che hai costruito con le cannucce e ottenere ugualmente una SIMMETRIA ASSIALE? Come? Perché?

____

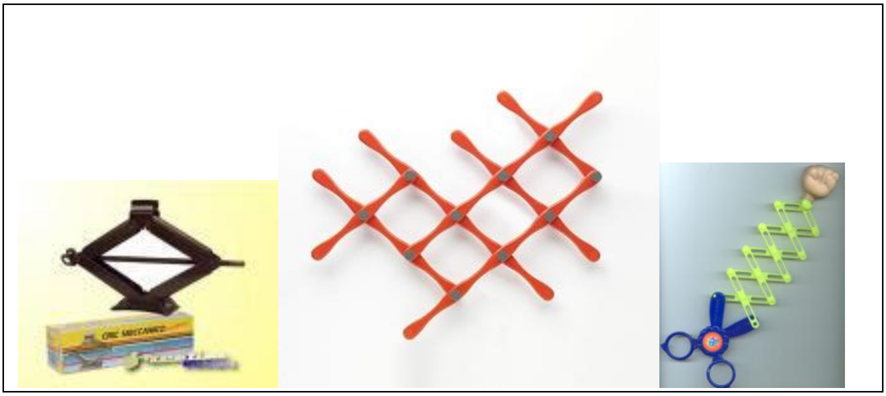
____

____

3. Disegna il nuovo sistema.

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 8
IL ROMBO ARTICOLATO NELLA REALTA’



1. Nelle immagini sopra vedi alcuni oggetti (cric, appendiabiti e forbice spara pugno) che utilizzano il rombo articolato. Prova a spiegare perché questi oggetti sono stati costruiti in questo modo. Quale proprietà del rombo sfruttano?
   CRIC

   APENDIABITI

   FORBICE SPARAPUGNO

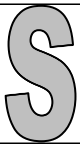
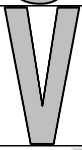
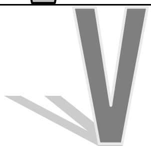
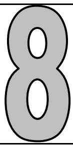
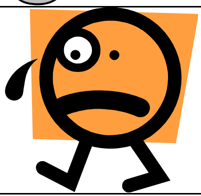
2. Conosci altri oggetti della vita reale che sfruttano il rombo articolato? Quali?

Classe_______________Alunno___________________________________

SCHEDA 9

FIGURE DIVERSE

1. Osserva le figure sottostanti. In alcuni casi SEMBRA che la macchina non modifichi la figura. In quali casi la lettera o figura SEMBRA non modificata? In quali casi invece la trasformazione è BEN VISIBILE?

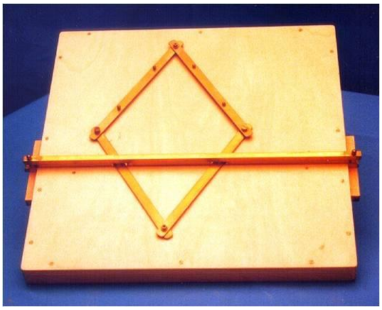
Figura	**Cambia-non cambia** **DISEGNO SIMMETRICO**
	
	
	
	
	

2. PERCHE' sembra che la figura non cambi? Quale condizione deve essere rispettata?

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 10

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO di DELUNAY: come è fatta la macchina?



L'immagine riproduce il **PANTOGRAFO di Delunay** cioè una macchina matematica che attraverso un sistema articolato obbliga un punto, un segmento o una figura a muoversi nel piano o a subire una trasformazione seguendo una legge matematica

1. Prova a muovere il sistema mettendo le mani sui vertici del sistema articolato. Chiudendo gli occhi muovi , cerca di capire come si muove una mano sulla macchina quando muovi l'altra mano. Secondo te cosa succede?
____2 Descrivi la macchina: da quante aste è formato il sistema articolato? Quale figura geometrica formano tali aste' ci sono altri elementi importanti nella macchina?
____3
Disegna la macchina in modo dettagliato e attribuisci delle lettere ai vertici del sistema articolato. (se non ci stai disegna sul retro del foglio)

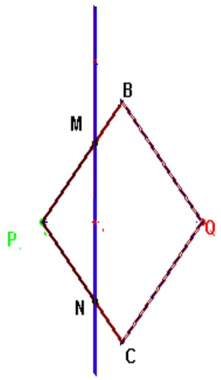
4 Nella macchina ci sono dei punti liberi di muoversi nel piano mentre altri sono obbligati a muoversi in un certo modo. Quali sono i punti liberi e quelli "imprigionati"? In che modo possono muoversi i punti "imprigionati? Perché?

____

Classe_______________Alunno____

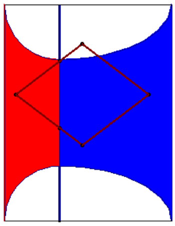
SCHEDA 11

ALLA SCOPERTA DEL Delunay: come è fatta la macchina?



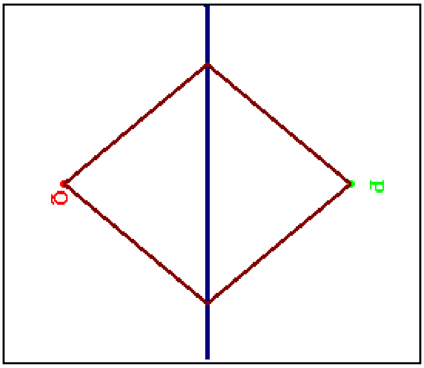
1. I vertici liberi in cui sono presenti dei fori per inserire delle mine scriventi sono chiamati uno "puntatore" e l'altro "tracciatore". Nel disegno della macchina, il puntatore è .... e il tracciatore è ....
2. Prova a muovere la macchina e cerca di stabilire in quali parti del piano può disegnare e in quali non riesce a disegnare. Disegna la parte del piano in cui la macchina non può arrivare..

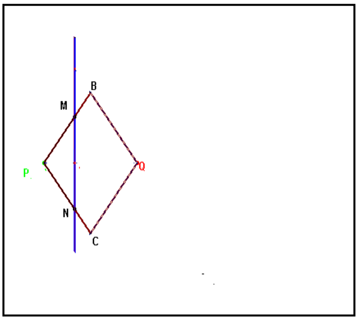
3. Spiega il tuo disegno. Perché la macchina non disegna in quella zona?
4. Osserva il disegno sottostante cosa significa secondo te?



Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 12
UN CONFRONTO FRA DUE MACCHINE





1. Il Pantografo di Delunay ha degli elementi in comune al Pantografo 1? Quali

   ____

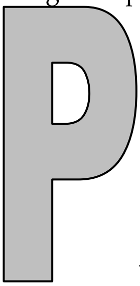
   ____

2. In che cosa sono diversi i due pantografi?

   ____

   ____

3. Secondo te, tenendo conto delle differenze fra le due macchine come trasforma la figura il pantografo di Delunay? Disegna e spiega la tua IPOTESI

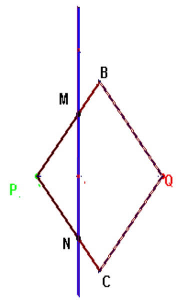


DIVENTA

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 13

ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO di Delunay: cosa fa la macchina?



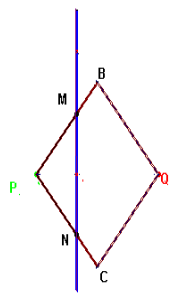
1. Metti dei fogli bianchi sulla macchina e fissali con il nastro adesivo. di carta. Disegna (usando riga, squadra e compasso) le figure indicate nella tabella nella parte di piano in cui si trova il puntatore. Metti ora la mina nel tracciatore e ricalca con il puntatore la figura disegna. Completa la tabella.

Se il puntatore descrive	*il tracciatore disegna*
un segmento perpendicolare alla scanalatura	
un segmento parallelo alla scanalatura	
un triangolo rettangolo	
un quadrato	
un cerchio	

2. Come trasforma la macchina le figure disegnate? Scrivi tutte le tue osservazioni.

Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 14
ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO di Delunay: perché lo fa?



1 Quale figura geometrica riconosci nel sistema articolato? Quali sono le sue caratteristiche?

LATI	
GUIDA	

2 Secondo te perché la macchina fa questa trasformazione che abbiamo chiamato STIRAMENTO? Quali sono le sue caratteristiche?

____

____

____

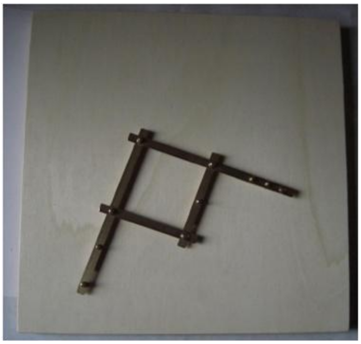
3 Disegna la figura simmetrica a quella data rispetto all'asse di simmetria r secondo le regole stabilite al punto precedente

4 Se mettessimo la guida a metà dell'asta cosa succederebbe alla figura trasformata?

____

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 15
ALLA SCOPERTA DEL PANTOGRAFO di SCHEINER: come è fatta la macchina?



L'immagine di fianco riproduce il **PANTOGRAFO di SCHEINER** cioè una macchina matematica che attraverso un sistema articolato obbliga un punto, un segmento o una figura a muoversi nel piano o a subire una trasformazione seguendo una legge matematica

1. Prova a muovere il sistema mettendo le mani sui vertici del sistema articolato. Chiudendo gli occhi muovi , cerca di capire come si muove una mano sulla macchina quando muovi l'altra mano. Secondo te cosa succede?

    ____

2. Descrivi la macchina: da quante aste è formato il sistema articolato? Quali figure geometriche formano tali aste? ci sono altri elementi importanti nella macchina?

    ____

    ____

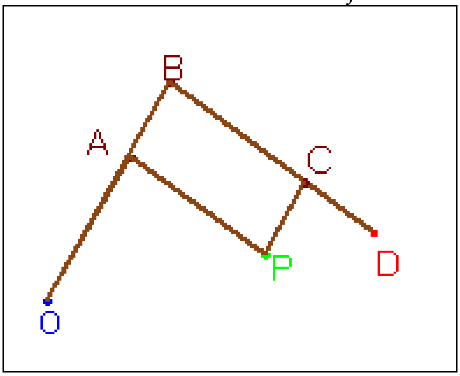
3. Disegna la macchina in modo dettagliato e attribuisci delle lettere ai vertici del sistema articolato. (se non ci stai disegna sul retro del foglio).

4. Individua nella macchina i vertici liberi e i vertici "imprigionati

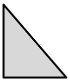
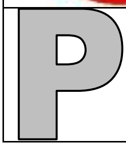
Classe______________Alunno_____________________________________

SCHEDA 16

ALLA SCOPERTA DELLO SCHEINER: cosa fa la macchina?



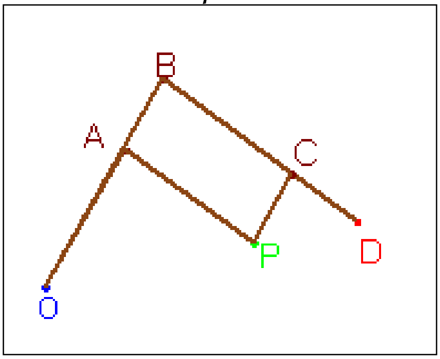
1 Metti dei fogli bianchi sulla macchina e fissali con il nastro adesivo. di carta. Disegna (usando riga, squadra e compasso) le figure indicate nella tabella nella parte di piano in cui si trova il puntatore. Metti ora la mina nel tracciatore e ricalca con il puntatore la figura disegna. Completa la tabella.

Se il puntatore descrive	*il tracciatore disegna*
	
	
Cerchio 	
	

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 17

ALLA SCOPERTA DELLO SCHEINER: proviamo a costruirlo



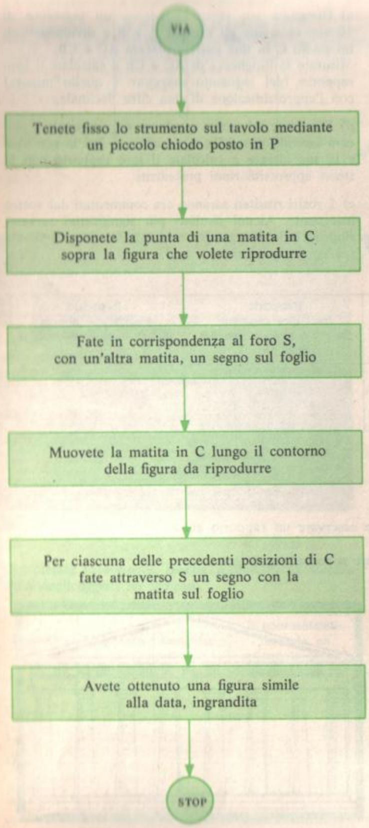
1 Prendi le informazioni

Quante aste?	
Quali misure?	AB BD AP…………..CP
Punto fisso	
Vertici allineati col punto fisso	
Altro	

2 Fai uno schizzo del tuo progetto

Classe_______________Alunno____

SCHEDA 18
Istruzioni per l'uso



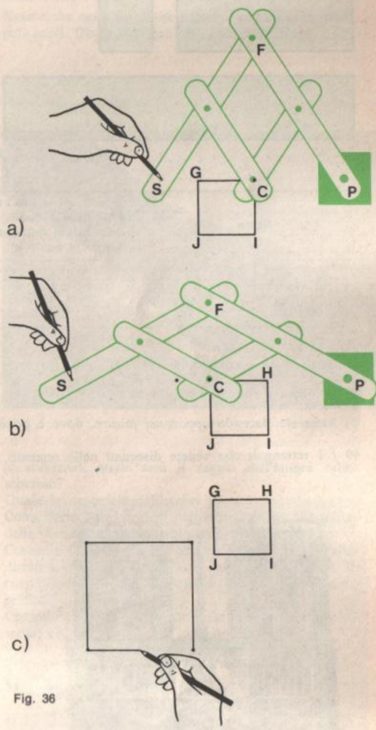
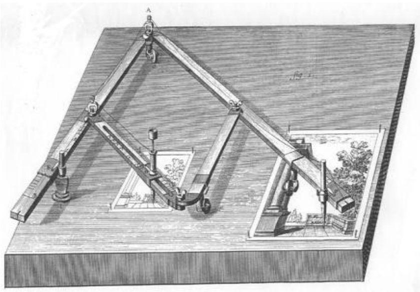
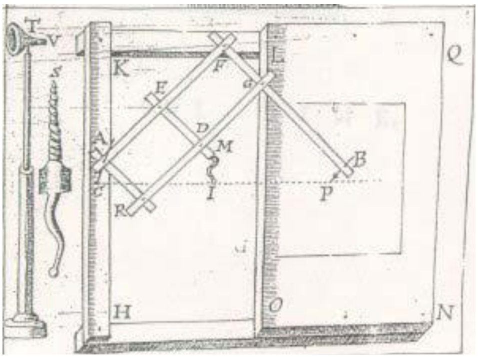


Fig. 36

Classe______________Alunno______________________________________

SCHEDA 19
Un po’ di storia sul pantografo di Scheiner





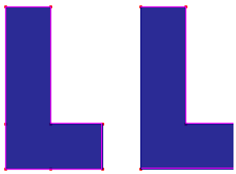
Nel 1603 a Dillingen “*un pittore eccellente*” (si tratta di Pierre Gregoire – Petrus Gregorius– autore di “Syntaxeon artis mirabilis, Leyda 1575) si vantava con Scheiner di aver inventato uno strumento per disegnare, ma rifiutava in modo irritante di divulgarne isegreti. Provocatoriamente, Gregorius diceva di “*non credere che una tale cosa potesse perfino essere immaginata; infatti, quella non era una invenzione umana, quanto una ispirazione divina, che egli riteneva essergli stata portata e rivelata non tramite gli sforzi umani, ma da qualche genio celeste*”.
Quanto avrebbe rivelato all’astronomo era che il suo strumento si basava sull’uso di compassi con un centro fisso.
Scheiner si mise all’opera per conto proprio, e dopo un periodo di intensi tentativi produsse uno strumento di grande ingegnosità e di vasta utilizzazione, per copiare, ingrandire e ridurre i disegni, per rappresentare gli oggetti in prospettiva e per la produzione di composizioni anamorfiche”
L’idea fondamentale di Scheiner (l’uso di un parallelogramma articolato per ingrandire o diminuire proporzionalmente immagini bidimensionali) è alla base dei pantografi ancora oggi in commercio, più sofisticati soltanto da un punto di vista meccanico.

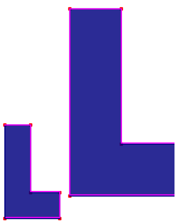
Verifica generale sui pantografi

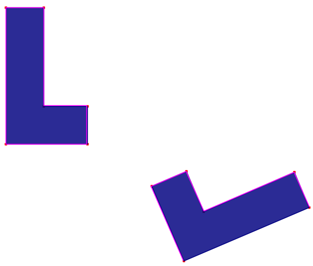
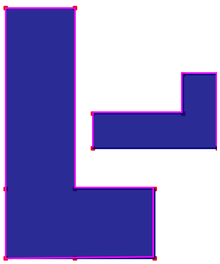
Nelle caselle di sinistra della tabella riportata sotto sono disegnate delle coppie di figure . Nelle corrispondenti caselle di destra indica il pantografo che secondo te le ha fatte (PANTOGRAFO 1, DELUNAY, SCHEINER) e il nome della trasformazione effettuata (SIMMETRIA ASSIALE, STIRAMENTO, OMOTETIA).

Spiega come fai a capire che pantografo è e disegna dove si trova la guida o il centro fisso a seconda del pantografo.

ATTENZIONE in alcuni casi la le figure NON sono state ottenuta con nessuno dei pantografi studiati, in quel caso scrivi NESSUNO.

Figure	Pantografo e trasformazione
	
	
	

QUESITO TIPO-PISA SUL PANTOGRAFO DI SCHEINER

Il pantografo di Scheiner è uno strumento usato per riprodurre immagini. Come si vede dalla Figura 1 è un sistema articolato formato da quattro aste uguali incernierate fra loro nei punti A,B, C, D in modo da formare un rombo ADCB con il lato uguale alla metà delle aste. L'apparecchio viene imperniato in O al piano di appoggio. Nei punti D e P, chiamati tracciatori, si possono mettere delle punte scriventi per disegnare

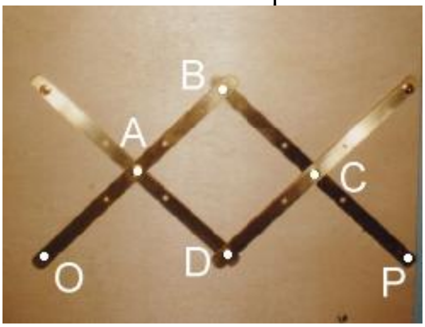
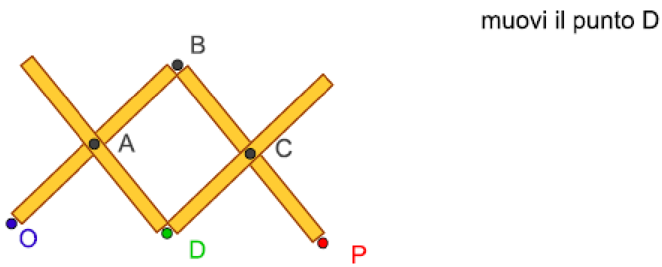


Figura 1

Domanda 1: PANTOGRAFO

a) Se D disegna un segmento lungo 4 cm, cosa traccerà il punto P?



- [ ] A Un segmento di 2 cm
- [ ] B Un segmento di 4 cm
- [ ] C Un segmento di 6 cm
- [ ] D Un segmento di 8 cm

b) Spiega il perché della tua risposta facendo riferimento alle caratteristiche della macchina

____

____

Domanda 2: PANTOGRAFO

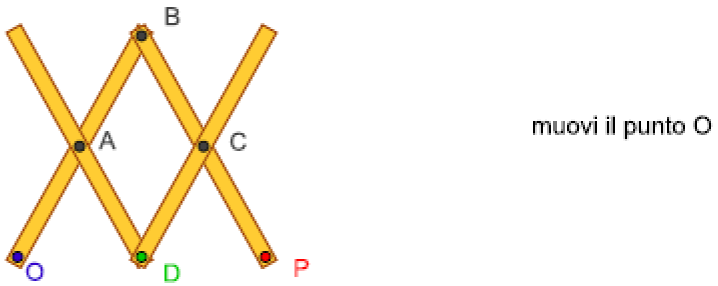
Il pantografo è ancora utilizzato dai gioiellieri per incidere i nomi su medagliette o braccialetti usando degli stampi che seguono con uno dei tracciatori del pantografo mentre l'altro incide sul metallo. Possono in questo modo riprodurre con minor fatica e maggior precisione un nome o un simbolo in formato ridotto. In quale dei tracciatori deve essere messa la punta per incidere in formato ridotto?

a) Risposta ________________

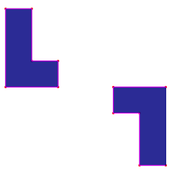
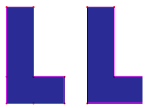
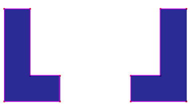
b) Perché____

Domanda 3: PANTOGRAFO

Immagina che ora il pantografo sia imperniato al piano di appoggio nel punto D, e che O e P siano i tracciatori.



a) Il punto fisso al piano di appoggio è ora D; il puntatore è O e il tracciatore è P. Se O disegna la lettera , come saranno fra loro i disegni? Scegli la Figura corretta.

 Figura 1	 Figura 2
 Figura 3	 Figura 4

b) Spiega perché escludi le altre Figure:

___

___

Bibliografia

Arzarello, F. (1992). La Ricerca in Didattica della Matematica. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, n. 15 (4), 345-356.

Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. G. (1998). Italian trends in research in mathematics education: A national case study in the international perspective. In Kilpatrick J., Sierpinska A.(a cura di). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 243-262.

AA.VV. UMI (2004). In Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico L., Robutti, O.(a cura di). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino*. Matteoni stampatore, Lucca.

Bagni, G. T. (1996). Numeri e successioni: riflessioni metamatematiche, storiche e didattiche su di un brano leopardiano. In Brunello, A. (a cura di). *Atti della Società Dante Alighieri a Treviso*, 1996-2002, 353-358.

Bagni, G. T. (2005). Numeri e algoritmi con carta e matita. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 28 A-B, n. 6, 596-610.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. In *Newsletter on Proof, Mai/Juin 1999*. Retrieved from http://www.lettredelapreuve.it/.

Ball, D. L., Charalambous, Y. C., Thames, M., Lewis, J. M. (2009). Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspective. In Tzekaki, M. et al. (a cura di). *Proceedings on 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, vol. 1, Thessaloniki, Greece, 121-125.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? In *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ball, D. L., Bass, H. (2003). Toward practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In Davis, B., Simmt, E. (a cura di). *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, 3-14.

Bartolini Bussi, M. G. (2010). Quadro di riferimento. In Martignone, F (a cura di). *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna, Azione 1*, Tecnodid Editrice, Napoli, 73-97.

Bartolini Bussi, M. G. (2009a). Experimental mathematics and teaching and learning proof. In *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France, www.inrp.fr/editions/cerme6, ultimo accesso 20 gennaio 2011.

Bartolini Bussi, M. G. (2009b). In search for theories: Poliphony, Polisemy and semiotic Mediation in the Mathematics Classroom. In Tzekaki, M. et al. (a cura di). *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME33, Thessaloniki, Grece, vol. 2, 121-128.

Bartolini Bussi, M. G. (2009c). Historical artifacts, semiotic mediation and teaching proof. In Hanna, G.et. al. (a cura di). *Explanation and proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*, Springer, 151-167.

Bartolini Bussi, M. G. (2009d). From the idea of mathematics laboratory to a challenging proposal for this ICMI study. In Barbeau & Taylor (a cura di). ICMI Study 16, *Challenging Mathematics in and beyond the classroom*, Trondheim (NO).

Bartolini Bussi, M. G. (2009e). Proof and Proving in Primary School. In *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Taiwan.

Bartolini Bussi, M. G , Borba, M. C. (2010). The role of resources and technology in mathematics education. In *ZDM Mathematics Education*, 42, Springer, 1-4.

Bartolini Bussi, M. G. , Maschietto, M. (2006). *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer-Verlag Italia.

Bartolini Bussi, M. G., Maschietto, M.(2008). *Machines as a Tools in Teacher Education.* In Tirosh, D. , Wood, T. (a cura di). The international handbook of mathematics teacher education, vol. 2, *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, Sense Publisher, 183-208.

Bartolini Bussi, M. G. , Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A-B, 270-294.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefact and signs after a Vygotskian perspective. In English, L. et al. (a cura di). *Handbook of International Research in Mathematics Education*, second edition, 746-783. New York and London, Routledge (Taylor & Francis Group).

Bartolini Bussi, M. G. (2007). Il laboratorio di matematica: storia e osservazioni. In Garuti, R. Orlandoni, A., Ricci, R. (a cura di). *Il laboratorio matematico-scientifico: suggerimenti ed esperienze,* supplemento n. 8, Innovazione educativa, Tecnodid, Napoli, 7-8.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 18, n. 3, 221-256.

Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R., Mariotti, M. A. (2007). Approaching and Developing the Culture of Geometry Theorems in School. In Boero, P. (a cura di). T*heorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, Sense Publisher, 211-217.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. , Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, CDE, Modena.

Boero, P. (1992). Sulla specificità delle ricerche in matematica: il caso del formalismo algebrico. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 15 (10), 963-986.

Boero, P. , Guala, E. (2008). Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers. In Sullivan, P., Woods, T. (a cura di). *The international handbook of mathematics teacher education*, Vol. 1 *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and teaching Development*, Sense Publisher, 223-244.

Boero, P. (a cura di) (2007). Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice, Sense Publisher, Rotterdam.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., (2007). Approaching theorems in grade VIII. In Boero, P. (a cura di). *Theorems in School. From History, Epistemology and cCognition to Classroom Practice*, 249-264. Sense Publisher, Rotterdam.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., Scali, E., (1995). Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. In *Proceedings of the XIX International Conference of PME*, vol. 1, 151-166.

Boero, P., Pedemonte, B., Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective. In *Proceedings of the XXI International Conference of PME*, Lahti, Finland, vol. 2, 81-88.

Boero, P., Chiappini, G., Pedemonte, B., Robotti, E., (1998). The voices and echoes game and the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a Vygotskian perspective: ongoing research. In *Proceedings of the XXII International Conference of PME,* Stellenbosch, South-Africa, vol. 2, 120-127.

Boero, P., Garuti, R. (2001). Voci ed echi nell'approccio al sapere teorico. In Atti del Convegno *Matematica e scuola: facciamo il punto*, IRRE Lombardia, Ghisetti Corvi Editori.

Boero, P., Garuti, R., Pedemonte, B., Robotti, E.(2003). Il gioco voci-echi come metodologia per la mediazione degli aspetti salienti delle teorie. In Malara, N. A. et al. (a cura di). *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice, Bologna, 29-41.

Bolondi, G. (2006). I mille significati della locuzione "Laboratorio di Matematica". In I*l Convegno del Ventennale*, a cura di B.D'Amore e S.Sbaragli, Pitagora Ed, Bologna.

Borel, E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. In SMF – Gazette – 93, Juillet 2002 (http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf, ultimo accesso 18 gennaio 2011).

Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. In *The Journal of the Learning Sciences*, n. 2, 141-178.

Cambiano, G. (1997). La scrittura della Dimostrazione in Geometria. In Detienne, M. (a cura di). *Sapere e scrittura in Grecia*, Laterza, Bari, 121-150.

Campedelli L. (1958-1965), I modelli geometrici, in CIEAEM (a cura di) *Il materiale per l'insegnamento della matematica*, Firenze: La Nuova Italia, 143-172 (orig. Edition 1958: *Le matériel pour l'einseignement des mathématiques*, Paris : Delachaux et Niestlé).

Canalini Corpacci, R., Ferri, F., Maschietto, M. (2011). Alla scoperta dei numeri e delle operazioni con Zero+1. Proposte di percorsi didattici per la scuola primaria, (in stampa).

Castelnuovo, E. (2008). *L'Officina matematica, ragionare con i materiali*, La Meridiana, Molfetta (BA).

Castelnuovo, E. (1964*). Didattica della matematica*, La Nuova Italia Editrice, Firenze.

Castelnuovo, E., (1965). L'Oggetto e l'Azione nell'Insegnamento della Geometria Intuitiva. In *Il Materiale per l'Insegnamento della Matematica*, La Nuova Italia, Firenze, 41- 65.

Carpay, J., van Oers, B. (1999). Didactical models. in Engeström, Y., Miettinen, R., Punamäki, R. (a cura di). *Perspectives on Activity Theory*, Cambridge University Press.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In Scanlon, E., O'Shea, T. (a cura di). *Newdirections in educational technology,* Springer, Berlin, 15-22.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale*. In: Frabboni, F., Giovannini, M. L. (a cura di). *Professione insegnante*, Franco Angeli, Milano, 145-154.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. In Boero. P. (a cura di). *Theorems in school. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*, Sense Publisher, Rotterdam, 163-179.

Duval, R. (1991), Structure du raisonnement déductif at apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 223-261.

Duval, R. (2007), Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In Boero, P. (a cura di). *Theorems in school. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*, Sense Publisher, Rotterdam, 137-161.

Even, R., Tirosh, D.(1995). *Subject matter knowledge and knowledge about students as of the subject matter. of teacher presentations.* In *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1-20.

Fennema, E., Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In. Grouws, D. A. (a cura di). *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* Macmillan, New York 147-164.

Ferri, F., Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G. (2005). L'educazione geometrica attraverso l'uso di strumenti: un esperimento didattico. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 28 A (2), 161-189.

Ferri, F.(2007). Il laboratorio di matematica nella classe. Costruzione di significati aritmetici attraverso l'uso di macchine per calcolare. In Garuti, R., Orlandoni, A., Ricci, R. (a cura di), *Il Laboratorio matematico-scientifico: suggeri-*

menti ed esperienze, supplemento n.8, Innovazione Educativa, Tecnodid, Napoli, 26-31.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. In Pui, M., Gutierrez, A., (a cura di*). Proceedings of the XXth PME International Conference,* vol. 2, 113-120.

Garuti, R. (2003). L'unità cognitiva fra congetturare e dimostrare. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 26 A-B n. 5, 523-540.

Garuti, R. (2009). Argomentare, congetturare e dimostrare nella scuola secondaria di I° grado. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A-B n. 6, 662-680.

Garuti, R., Martignone, F. (2010). La formazione degli insegnanti nel progetto MMLab-ER. In Martignone, F. (a cura di) *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna, Azione 1*, Tecnodid Editrice, Napoli, 73-97.

Garuti, R., Boero, P., Chiappini, G. (1999). Bringing the Voice of Plato in the Classroom to Detect and Overcome Conceptual Mistakes. In *Proceedings of the XXIII International Conference of PME,* Haifa, Israel, vol. 3, 9-16.

Garuti, R., Boero, P. (2002*).* Interiorisation of forms of argumentation: a case study. In *Proceedings of the XXVI International Conference of PME*, Norwhich, UK, vol. 2, 408-415.

Garuti, R. (2009. Il laboratorio di matematica: un esempio con la Pascalina. In Robutti, O., Mosca, M. (a cura di). *Il laboratorio in Matematica e Fisica*, *Atti del IV Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica*, KWB, Torino, 355-361.

Giacardi, L. (2008). La scuola come 'laboratorio'. Giovanni Vailati e il progetto di riforma dell'insegnamento della matematica.. In *Annali del Centro Pannunzio*, anno 2007-2008, 321-334.

Graeber, A., Tirosh, D. (2008). Pedagogical Content knowledge: Useful concept or Elusive notion. In Sullivan, P., Woods, T. (a cura di), *The international handbook of mathematics teacher education, Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and teaching Development* Sense Publisher, Rotterdam, 117-132.

Hanna, G. (2007). The ongoing value of proof. In Boero, P. (a cura di). *Theorems in School*. *From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* Sense Publisher, Rotterdam, 3-16.

Hasan, R. (2002). Semiotic mediation, language and society: three exotropic theoryes – Vygotsky, Halliday and Bernstein, available on line in http://www.education.miami.edu/blantonw/mainsite/Componentsfromclmer/Component13/Mediation/SemioticMediation.html.

Hill, C., Rowan, B., Ball, D. L., (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. In *American Educational Research Journal*, vol. 42, 371-406.

Hill, H. C., Shilling, S. G., Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. In *The Elementary School Journal*, vol. 105 (1), 11-30.

Jaworski, B., Wood, T. (2008). The Mathematics Teacher Educator as a developing Professional. In *The international handbook of mathematics teacher education*, Vol. 4, Sense Publisher, Rotterdam.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: the contribution of research. In *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, vol. 47, 101-116.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (2001) Adding it to up: How children learn mathematics. In *National Research Council,* Washington DC.

Krainer, K., Wood, T. (2008). Partecipants in Mathematics Teacher Education. In *The international handbook of mathematics teacher education*, Vol.3, Sense Publisher, Rotterdam.

Leont'ev, A. N. (1976/1964), *Problemi dello sviluppo psichico*, Ed. Riuniti and Ed. Mir.

Malara, N. A. (1992). Ricerca Didattica e Insegnamento. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 15 (2), 107-136.

Maschietto, M. (2007). Macchine Matematiche e laboratorio. In Garuti, R., Orlandoni, A., Ricci, R. (a cura di). *Il laboratorio matematico-scientifico: suggerimenti ed esperienze*, supplemento n.8 Innovazione educativa, Tecnodid, Napoli, 7-8.

Maschietto, M. (2010). Piattaforma e risorse per gli insegnanti. In Martignone, F. (a cura di). *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna, Azione 1*, Tecnodid Editrice, Napoli, 98-105.

Maschietto, M. (2010). Il laboratorio delle macchine matematiche di Modena. In Martignone, F. (a cura di). *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna, Azione 1*, Tecnodid, Napoli, 29-36.

Maschietto, M, Martignone, F. (2009). Attività con le Macchine Matematiche. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A-B, n. 3 295-315.

Mason, J. (2008). PCK and Beyond. In Sullivan, P., Woods, T. (a cura di). *The international handbook of mathematics teacher education*, vol.1 *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and teaching Development,* Sense Publisher, Rotterdam, 301-322.

Mariani, C., (2009). *Costruzione di significati attraverso l'uso di artefatti: un esperimento didattico con la 'pascalina'*. Tesi di master di II livello in Didattica delle Scienze, Università di Udine.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. *Hanbook of research on the Psychology of Mathematics Education*, 173-204, Sense Publisher, Rotterdam.

Mariotti, M. A. (2009). La dimostrazione e la sua pratica nell'insegnamento della matematica. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32

A-B n. 6, 611-660.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. A., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in context: from history and epistemology to cognition. In Pehkonen, E. (a cura di). *Proceedings of the XXI International Conference of PME,* vol.1, 180-195.

Martignone, F., Bartolini Bussi, M. G. (2010). Il Laboratorio delle Macchine Matematiche: dalla tradizione a un progetto regionale di formazione degli insegnanti della scuola secondaria. In Menabue, L., Santoro G. (a cura di). *New Trends in Science and Technology Education: selected papers*, , CLUEB Bologna, vol. II, 129-147.

Martignone, F. (2009a). Processi di esplorazione e argomentazione in attività con particolari Macchine Matematiche: i pantografi per le trasformazioni geometriche del piano. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 32 A-B n.6, 681-700.

Martignone, F. (2009b). Laboratori con le macchine matematiche, in *Il laboratorio in Matematica e Fisica.* In Robutti, O., Mosca, M. (a cura di). *Il laboratorio in Matematica e Fisica, Atti del IV Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica*, KWB, Torino, 385-395.

Martignone, F. (2007). *Analisi di processi di pianificazione e sviluppo di strategie risolutive in problemi di Teoria dei Giochi*. Tesi di dottorato in Didattica della matematica, Università di Genova.

Martignone, F. (a cura di) (2010), *MMLab-ER: Laboratori delle macchine matematiche per l'Emilia-Romagna, Azione 1*, in USR E-R & Regione Emilia-Romagna, *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna*, Tecnodid Editrice, Napoli, 17-208,

Martignone, F. (2011), Laboratory activities in teacher training, *Proceedings. CERME7,* http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/, Rzeszòw, Poland.

Martignone, F., Antonini, S. (2009). Exploring the Mathematical machines for geometrical transformations: a cognitive analysis. In *Proceedings of the XXXIII International Conference of PME,* Thessaloniki, Grece, vol. 4, 105-112.

Norman, Donald A. (1991): Cognitive artifacts. In: Carroll, John M. (a cura di) *Designing Interaction: Psychology at the Human-Computer Interface*. Cambridge University Press pp. 17-38

Norman, D. A. (1993). *Things that make us smart*. Addison-Wesley Pub. Com (trad. ital. *Le cose che ci fanno intelligenti*, Feltrinelli, 1995).

Paola, D. (2007). Dal laboratorio alla lezione. In Garuti, R., Orlandoni, A., Ricci, R. (a cura di). *Il laboratorio matematico-scientifico: suggerimenti ed esperienze,* supplemento n.8, Innovazione educativa, Tecnodid, Napoli, 7-8.

Paola, D. (2008). Il laboratorio per l'insegnamento apprendimento della matematica: le proposte rivisitate della Commissione UMI. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 31 A-B n. 6, 519-552.

Peano, G. (1957-1959), *Opere Scelte*, a cura di Ugo Cassina, Cremonese, Roma.

Pellerey, M. (2005). Verso una nuova metodologia di ricerca educativa: la Ricerca basata su progetti (Design-based Research). In *Orientamenti Pedagogici* vol. 52, n. 5, 721-737.

Pellerey, M.(1980). Il metodo della ricerca-azione di K. Lewin nei suoi più recenti sviluppi e applicazioni. In *Orientamenti Pedagogici*, n. 3, 449-463.

Pedemonte, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la demonstration. Tesi di dottorato in Didattica della Matematica, Università di Genova e Università J. Fourier, Grenoble.

Pergola, M., Zanoli, C. (2010). L'Associazione delle Macchine Matematiche. In Martignone, F. (a cura di). *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna. Azione 1,* Tecnodid, Napoli, 37-39.

Prodi, G. (1992). Ricerca in Didattica della Matematica. In *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana,* 19 (1-2), 146-150.

Rabardel, P. (1997). Gli strumenti dell'uomo. Dal progetto all'uso. In *Ergonomia,* 9/1997, disponibile on line: http://www.ergonomia.info/archivio/rabardel.html.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies*, Armand Colin, Paris.

Rabardel, P., Samurçay, R. (2001). From Artifact to Instrumented-Mediated Learning, New challenges to research on learning. *International symposium organised by the Center for Activity Theory and Developmental Work Research*, University of Helsinki, March 21-23.

Robutti, O. (2009). L'insegnamento e l'apprendimento della matematica nel 21° secolo:sfide mondiali e risposte nazionali. In *Atti del 3° Convegno Nazionale Incontri con la matematica. Pratiche matematiche e didattiche in aula,* Pitagora, Castel San Pietro Terme (BO), 33-40.

Savioli, K., (2004). Punti di forza per l'utilizzo della Pascalina 'zero + 1' in classe. In *Sperimentazioni in classe prima- scuola primaria*, www.avimes.it/allegati/2004_2005/punti%20forza%20pascaline.doc

Serres, M. (1993). *Les Origines de la Géemétrie*, Flammarion, France.

Sfard, A.,(2005). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education In *Educational Studies in Mathematics,* Springer, vol. 58, 393–413.

Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo*. Erickson, Trento, pp. 359.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. In *Educational Researcher*, vol.15, 4-14.

Sullivan, P. (2008). Knowledge For Teaching Mathematics: An Introduction, in Sullivan, P., Wood, T. (a cura di), *The international handbook of mathematics teacher education*, vol.1, *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*, Sense Publisher, Rotterdam, 1-9.

Tirosh, D.(2008). Tools and processes in Mathematics Teacher Education: An Introduction. In Tirosh, D., Wood, T. (a cura di). *The international handbook of mathematics teacher education*, vol.2, *Tools and Processes in Mathematics Teacher* *education,* Sense Publisher, Rotterdam, 1-11.

Trouche, L. (2005). Construction et conduit des instruments dans des apprentissage mathématiques: Nécessité des orchestratios. In *Reserches en Didactique des mathematiques,* 25 (1), 91-138.

UMI (1989), Syllabus. In *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana* 7 (3), 5-16.

Vygotsky, L. S. (1934/1990), *Pensiero e linguaggio: ricerche psicologiche* (a cura di L. Mecacci), Laterza, Bari.

Vygotskij, L. S. (1974). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*. Firenze: Giunti (*Istoria razvitija vyssih psihiceskih funktcij,* Accademia delle Scienze Pedagogiche della RSFSR, Moskva 1960; testo ultimato nel 1931).

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In Wertsch J. V. (a cura di). *The concept of activity in Soviet Psychology*, Armonk, NY. Sharpe.

Vygotskij, L. S. (1987). *Il processo cognitivo*.Torino: Boringhieri (*Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press, Cambridge, London 1978).

Watson, A., Sullivan, P. (2008). *Teachers Learning about Tasks and Lessons*. In Tirosh, D., Wood, T. (a cura di). *The international handbook of mathematics teacher education*, vol. 2, *Tools and Processes in Mathematics Teacher education*, Sense Publisher, Rotterdam, 109-134